

Institut Royal Colonial Belge

SECTION
DES SCIENCES TECHNIQUES

Mémoires. — Collection in-8°.
Tome VIII, fasc. 3.

Koninklijk Belgisch Koloniaal Instituut

SECTIE
VOOR TECHNISCHE WETENSCHAPPEN

Verhandelingen. — Verzameling
in-8°.— Boek VIII, afl. 3.

L'Évaluation mathématique des Gisements détritiques

PAR

Pierre-V. GROSJEAN

LICENCIÉ EN SCIENCES PHYSIQUES,
CHEF DE RECHERCHES AU SERVICE DE MÉTÉOROLOGIE
ET DE GÉOPHYSIQUE DU CONGO BELGE.



Avenue Marnix, 25
BRUXELLES

Marnixlaan, 25
BRUSSEL

1953

PRIX : F 200
PRIJS: F 200



L'Évaluation mathématique des Gisements détritiques

PAR

Pierre-V. GROSJEAN

LICENCIÉ EN SCIENCES PHYSIQUES,
CHEF DE RECHERCHES AU SERVICE DE MÉTÉOROLOGIE
ET DE GÉOPHYSIQUE DU CONGO BELGE.

Mémoire présenté à la séance du 29 février 1952.

PRÉFACE

par

Georges SCHAAR,

Ingénieur civil des Mines, Ingénieur géologue A. I. Lg.,

Directeur de la Société belge de Recherches Minières en Afrique

« REMINA ».

La découverte des gîtes minéraux est du ressort du géologue. Lorsqu'il s'agit de gisements détritiques, le géologue examine les concentrés de pannage de quelques puits foncés dans le fond et sur les flancs des vallées, esquisse la carte géologique et interprète celle-ci en fonction de ses connaissances en métallogénie. La géographie lui vient en aide pour estimer les possibilités d'extension des gîtes détritiques.

Il conclut alors, éventuellement, à l'opportunité d'une étude plus poussée. Son rôle s'estompe provisoirement ; l'ingénieur entre en jeu.

La prospection préliminaire qui suit a pour but de donner une première approximation chiffrée de l'importance de la découverte et de délimiter les bassins hydrographiques dont il faudra poursuivre l'étude et ceux qu'on peut abandonner.

A ce stade intervient l'exploitant qui pose deux questions pouvant se résumer à : **combien** et **où** ?

Les équipes de prospecteurs, dirigés par des ingénieurs, retournent sur le terrain. Le rôle des ingénieurs de prospection se précise en même temps qu'il devient plus délicat. Il s'agit de contrôler le travail matériel de prospection, de dresser des cartes précises, d'y délimiter les placers, et de les évaluer. C'est de cette phase de l'étude

des gisements détritiques : la prospection systématique d'évaluation, que traite l'ouvrage de M. P. V. GROSJEAN.

Bien qu'il existât déjà une volumineuse bibliographie traitant de ce sujet, réunissant des auteurs belges et étrangers, il a paru intéressant à la REMINA, société spécialisée en recherches minières, de donner l'occasion à un théoricien, armé d'un solide bagage mathématique, de se rendre compte *de visu*, des conditions pratiques dans lesquelles opèrent les prospecteurs et des difficultés que soulèvent les évaluations.

Grâce à son esprit d'analyse rompu aux disciplines mathématiques, M. P. V. GROSJEAN a pu fouiller les divers problèmes posés. Dans sa monographie, qui dépasse largement le cadre que nous avons imaginé à l'origine, il expose magistralement les conclusions auxquelles l'a conduit son étude mathématique. Relevons certaines particularités originales :

La notion d'accumulation a , qui n'est autre que le produit th ou poids de minerai par m^2 , est choisie comme variable aléatoire, au lieu de la variable t ou teneur, communément adoptée par les auteurs.

Outre les arguments donnés par M. GROSJEAN pour l'adoption de cette variable, remarquons en effet ce qui suit. Lorsque la phase d'alluvionnement du gravier est achevée, le minerai est mis en place et la valeur a est fixée en chaque endroit. Le dépôt subséquent du recouvrement, généralement stérile, ne change plus rien à la valeur a mais il modifie la valeur t par suite des changements que subit la hauteur h en chaque endroit au cours des phases finales de l'alluvionnement.

L'étude de cette donnée a est déjà suffisamment complexe. Il ne faut pas y ajouter un élément d'irrégularité résultant des vicissitudes du gisement au cours de son histoire. L'emploi de la notion a constitue donc une réelle simplification.

L'auteur étudie les erreurs inévitables commises dans la détermination de la teneur et des autres caractéristiques des différents puits. Cette application de notions théoriques connues permet d'apprécier le degré d'imprécision qu'il faut attribuer aux nombres inscrits sur les cartes à côté de chaque puits et par conséquent les unités dans lesquelles il convient de les exprimer.

Il en résulte également que si le contrôle des caractéristiques d'un nombre restreint de puits montre des divergences parfois élevées, on n'est pas toujours en droit de conclure à des négligences ou à des malfaçons. Les erreurs accidentelles ne seront jamais entièrement évitées ; elles peuvent être **localement** élevées. L'essentiel est que le mode opératoire, **immuable**, ait été respecté et que ce mode opératoire soit exempt d'erreurs **systématiques**.

L'emploi des fonctions de PEARSON, traduites en graphiques, constitue certainement l'innovation la plus intéressante de l'auteur, pour la résolution du problème de l'évaluation.

La courbe des fréquences des valeurs a des puits d'un placier est comparée à des courbes qui constituent en quelque sorte la traduction de calculs préétablis.

Les points du diagramme représentant les quelques puits aberrants, anormalement riches, sont ramenés sur la courbe de PEARSON dont le choix est imposé par la très grosse majorité des autres puits.

Ainsi est résolue la question si épineuse des surévaluations auxquelles on s'expose par incorporation pure et simple des caractéristiques de ces puits aberrants dans le calcul de la moyenne.

Remarquons que le rôle du géologue réapparaît ici, car toutes teneurs ou accumulations anormalement élevées, surtout si elles sont groupées sur le terrain, justifient un examen minutieux. Il faut déceler par un contrôle du lavage et par des puits supplémentaires si

la richesse est réelle ou si elle n'est qu'apparente, due à une erreur accidentelle. Si la richesse est réelle le géologue doit en rechercher la cause. Cette recherche est toujours fertile en enseignements.

Le rôle du géologue, ou du géographe, doit également consister à séparer nettement sur les cartes, les gisements appartenant à des unités géographiques distinctes. Il ne faut pas, en effet, comprendre dans une même population d'échantillons ceux provenant de flats, de terrasses, d'éluvions, de vallées sèches.

L'emploi de la méthode de M. P. V. GROSJEAN ne demande pas plus de temps que les méthodes ordinaires, pour les gisements faciles à évaluer. Pour les autres, elle présente l'avantage de montrer indubitablement que les données sont insuffisantes, que la maille doit être resserrée. D'ailleurs, remarquons que la dépense engagée pour recueillir les données sur le terrain est beaucoup plus élevée que celle qu'on consacre à analyser ces données. Un accroissement des dépenses dues à l'évaluation n'a que peu d'influence sur le coût total de la prospection.

Par analogie avec la notion de « tolérance », utilisée en mécanique, l'auteur préconise de renseigner l'exploitant sur les écarts et leur improbabilité. Ces données, déduites par calcul simple de la courbe de PEARSON choisie, sont en effet utiles à l'exploitant. Elles lui permettront de mesurer les risques qu'il court en exploitant un gisement, sachant qu'il y a x chances pour que la réserve soit inférieure à la réserve limite que lui imposent les conditions économiques. Il peut apprécier si un complément de prospection se justifie, dans le cas où une maille trop large a forcé le prospecteur à indiquer des écarts probables trop grands.

L'auteur établit également d'autres théories : celle du bénéfice maximum, où il examine la payabilité en profondeur, c'est-à-dire variabilité en profondeur de la limite du gravier traité ou rejeté, et la curieuse théorie

du « gisement parfait », lequel jouit de propriétés particulières assez remarquables.

D'autres applications intéressantes de la méthode de M. P. V. GROSJEAN sont à mettre au point. Citons le problème qui se pose périodiquement à chaque exploitant lors de la réestimation des réserves : que contient le solde d'un placer partiellement exploité, compte tenu des résultats de l'exploitation d'une part et des valeurs initiales des réserves d'autre part ?

Souhaitons, comme le fait l'auteur, que sa méthode trouve également des applications dans d'autres domaines que ceux de l'industrie minière.

Ainsi progressent la science et l'art.

Bruxelles, le 25 février 1952.

AVANT-PROPOS

Il y a science des choses simples, et art des choses compliquées. Science, quand les variables sont énumérables et leur nombre petit, leurs combinaisons nettes et distinctes... On tend vers l'état de science, on le désire... L'artiste se fait des recettes ; l'intérêt de la science gît dans l'art de faire la science.

P. VALÉRY, « *Rhumbs* ».

A peine sort-il de l'âge de la pierre que le bipède humain se livre à d'étranges besognes : il gratte le sol, sélectionne des bouts de roche, les lave, les palpe, pour enfin les emporter précieusement et les cacher dans sa hutte. En un mot il prospecte, il cherche les gîtes où se dissimulent les précieux minerais dont le feu extraira le fer et l'airain. Mal satisfait par son propre sous-sol, il lorgne vers celui du voisin, et c'est la guerre de conquête... Certains érudits modernes prétendent même que l'Iliade et l'Odyssée ne sont rien d'autre que les récits symboliques des combats, livrés à l'Est et à l'Ouest, par les prospecteurs grecs partis à la recherche de la précieuse cassitérite... Ainsi, le métier de prospecteur est-il peut-être le plus ancien de ceux que l'homme civilisé ait jamais pratiqué.

Il ne suffit pas de prospecter, il faut encore évaluer les richesses découvertes et décider s'il faut ou non les exploiter, s'il faut considérer le travail comme payant ou non. L'évaluation n'est peut-être pas tout à fait aussi ancienne que la prospection, mais elle est une nécessité de notre âge du super-industrialisme. Aussi, ne peut-on que rester confondu lorsque l'on découvre jusqu'à

quel point l'empirisme et la routine sévissent encore dans les procédés mathématiques ou soi-disant tels en usage lors de l'évaluation des gisements que l'on avait pourtant si soigneusement prospectés.

Au cours de ces tous derniers lustres, à vrai dire, des travaux de plus en plus nombreux ont vu le jour, traitant du problème de l'évaluation des gisements, problème qui, après tout, relève comme tant d'autres de la statistique mathématique, tout en présentant des aspects assez originaux, étrangers aux préoccupations habituelles de cette science encore jeune, et toujours en plein développement.

L'essentiel du présent travail a été écrit en 1949, alors que l'auteur était agent technique attaché à un groupe de prospecteurs au Congo belge. Le but initial en était de donner aux ingénieurs travaillant en pleine brousse une petite monographie pratique mettant le problème de l'évaluation bien au point dans son cadre statistique, et indiquant notamment la solution graphique originale basée sur les fonctions gamma incomplètes. Puis, la rédaction a pris un aspect plus théorique, elle s'est avancée dans la voie de la recherche, tout en conservant une allure tantôt didactique, tantôt technique dont les puristes de la statistique mathématique voudront bien excuser l'auteur. Tout comme les praticiens de la prospection voudront bien lui pardonner de les avoir entraînés parfois un peu loin dans le maquis des axes et des intégrales...

En un sens, certaines des questions examinées ici débordent d'ailleurs du cadre de l'économie minière. On oppose souvent la prospection des gîtes primaires à celle des gîtes secondaires ; et si la première intéresse de plus en plus les géophysiciens, la seconde semble souffrir d'un certain dédain de la part des mêmes géophysiciens qui préfèrent l'abandonner aux purs techniciens. Le présent travail est une tentative de réhabilitation

de ces parents pauvres, les gîtes secondaires, aux yeux des scientifiques purs et des fervents de la physique du globe. Il y a du travail pour eux dans cette direction, et peut-être même du beau travail s'ils le veulent.

D'autre part, le fond mathématique du sujet n'est autre que le problème de la répartition d'une variable aléatoire sur une surface ou dans un volume. La question n'est certes pas nouvelle ; elle s'apparente au difficile problème des « trends », des « time series », c'est-à-dire des *champs aléatoires*. Comme telle, elle a été traitée avec bonheur par de nombreux auteurs, même classiques, mais peut-être pas du point de vue spécial envisagé ici. Or, ce point de vue n'est pas seulement celui de l'ingénieur des mines en arrêt devant un placer, c'est aussi celui du météorologiste qui étudie la répartition des températures sur un pays et qui veut évaluer leurs moyennes locales ; c'est celui du climatologiste devant partager une contrée en régions pluviométriquement différentes, et devant dresser le bilan probable des eaux tombées ; c'est celui de l'agronome délimitant des zones propres à des cultures déterminées et supputant leur rendement après échantillonnage par des cultures d'essai.

Aussi, cette simple petite monographie de... disons « mathématique industrielle », selon un vocable nouveau qui rencontre de plus en plus de succès dans l'industrie moderne surtout hors d'Europe, cette monographie ne prétend donc en rien avoir épuisé le sujet complexe de l'évaluation des gisements détritiques et des questions mathématiques y apparentées. L'auteur n'a jamais eu pareille intention, et il s'estimera vraiment satisfait si son travail, en arrivant à intéresser malgré tout, et les statisticiens mathématiciens, et les ingénieurs prospecteurs, et les géophysiciens, oriente à l'occasion l'un ou l'autre d'entre eux dans un sentier qu'on ne peut guère qualifier de battu, et où des richesses scientifiques

enfouies attendent encore certainement... leur prospecteur.

* * *

L'auteur remercie :

La société REMINA qui lui a accordé les facilités voulues, à l'expiration de son contrat, pour procéder en toute tranquillité aux recherches qu'il proposait ;

M. l'ingénieur STUDER, à la longue expérience duquel il doit d'être initié aux arcanes de la prospection ;

La société SYMÉTAÏN, qui lui a ouvert ses archives et ses chantiers.

Il remercie tout particulièrement :

M. SCHAAR, directeur de la société REMINA, pour les fructueux entretiens qu'il a eus avec lui aussi bien au Congo qu'à Bruxelles, et grâce auxquels bien des points obscurs du problème ont pu être élucidés.

* * *

N. B. 1. — Les parties, les chapitres et les paragraphes sont l'objet, chacun dans leur suite propre, d'une numérotation continue et distincte se poursuivant dans tout l'ouvrage. Les alinéas sont numérotés décimalement au sein de chaque paragraphe.

2. — Les références bibliographiques sont indiquées par des numéros entre crochets [] qui renvoient à la liste des références *in fine*.

CHAPITRE-INTRODUCTION

LE GISEMENT ET SON ÉVALUATION

§ 1. Les ségrégations.

1.0. — Avant d'aborder une étude mathématique de l'évaluation, il est bon de se rappeler les caractéristiques physiques essentielles du phénomène de la minéralisation. Nous le ferons en suivant la description très schématique ci-après.

1.1. — Imaginons une roche primaire, très régulièrement filonnée en cassitérite par exemple ⁽¹⁾, et ce sur une longue distance, dans le lit et aux environs de la (future) rivière. Imaginons aussi que celle-ci soit parfaitement rectiligne, et qu'elle coule à une vitesse parfaitement régulière et constante. Imaginons enfin que les roches se désagrègent très régulièrement en particules parfaitement identiques.

Si pareil phénomène se réalisait, nous assisterions à une **ségrégation constante**, caractérisée par la constance, sur toute l'étendue du gisement des variables de densité surfacique dont nous parlerons longuement plus loin, la *hauteur* des couches et l'*accumulation* du minerai. Lors de l'évaluation d'un pareil gisement, la statistique ne jouerait qu'un rôle plutôt effacé.

1.2. — Bien entendu, ce phénomène de ségrégation constante est purement fictif ; pour le décrire, nous

⁽¹⁾ Il est signalé une fois pour toutes que la quasi-totalité des exemples cités se rapportent à la cassitérite, minerai dont la répartition dans les gisements a été étudiée par l'auteur beaucoup plus spécialement que celle de tout autre.

avons dû employer une pléthore d'adverbes « très » ou « parfaitement » que rien ne nous permet de justifier. Aussi, donnerons-nous maintenant une peinture un peu plus fidèle de la réalité en remplaçant ces adverbes par les mots « à peu près ».

Mais alors, les variables de densité deviennent des *variables aléatoires* fluctuant autour d'une moyenne restant constante sur tout le gisement. En ce cas, nous dirons que le gisement aura été constitué par un phénomène de **ségrégation naturelle** (DEMELENNE), ou encore que la minéralisation s'est faite selon un *premier mode* (BATY). Ceci ouvre ainsi la porte au calcul des probabilités ordinaires ; les fluctuations, qui peuvent être importantes, sont prévisibles en probabilité.

1.3. — Tel n'est pas encore, tant s'en faut, le phénomène réel. Pour arriver à sa description définitive, nous allons d'abord imaginer un autre stade fictif, tout aussi « fonctionnel » que celui décrit en 1.1. Imaginons donc que le filonnage varie de place en place, mais très régulièrement. Imaginons aussi que le courant de la rivière varie avec continuité, mais pas trop rapidement, de place en place et de jour en jour. Imaginons enfin que la rivière elle-même décrive un tracé sinueux, pas trop compliqué, et qui varie même dans le temps, sans trop de heurts cependant.

Dès lors, la ségrégation n'est plus et ne saurait plus être constante. Son étude — en la supposant possible dans ses détails — ne relèverait pas encore de la statistique, mais de la physique mathématique : celle-ci dirait, dans son langage, qu'il se constitue un *champ de hauteurs* et un *champ d'accumulations*. Nous écrirons simplement, avec DEMELENNE [13], qu'il se produit une **ségrégation large** ; le caractère essentiel de celle-ci est donc avant tout son allure *fonctionnelle*.

1.4. — Combinons maintenant les deux phénomènes de

ségrégation large et de ségrégation naturelle, en admettant cependant que les variations dues à la seconde sont petites vis-à-vis de celles dues à la première. Les champs fluctuent autour de leurs valeurs locales vraies, un peu comme une grandeur physique qu'on ne saurait mesurer qu'avec une faible précision. Nous dirons donc que nous avons affaire à une **ségrégation physique** ; son étude relèverait du calcul des erreurs, par exemple.

1.4. — Mais notre peinture peut serrer la réalité d'encore plus près ; pour cela, il nous suffit de supprimer définitivement les adverbess de perfection réintroduits en 1.3. dans la description du phénomène. Substituons-leur donc les mots « plus ou moins » ou « assez bien » : le filonnage est plus ou moins régulier, le courant varie assez bien, etc... Ce sont maintenant les causes elles-mêmes qui fluctuent notablement ; les variations « naturelles » peuvent devenir comparables aux variations « larges ». Le minerai se concentre en des plages irrégulières, allongées dans le sens du courant, et appelées *runs* : il apparaît des accumulations anormales, aberrantes, qui, à la prospection donneront lieu plus tard à des *puits exceptionnels*. Le champ de base ne joue plus que le rôle du « *trend* » des statisticiens anglais, de la tendance de la minéralisation désordonnée à présenter quand même un caractère fonctionnel latent.

Nous assistons ainsi à une **ségrégation fine** (DEMELENNE), ou encore à la minéralisation selon le *second mode* de BATY [10]. Et l'ensemble donne la **ségrégation générale**, dont l'étude relève de la statistique mathématique. La caractéristique des ségrégations « fine » et « générale » est leur allure *stochastique*.

1.6. — Pour terminer, notons ceci : Passons à la limite, et imaginons cahotiques à l'extrême les irrégularités des causes. Dès lors, le champ, le *trend*, peut devenir littéralement indécélable ou même inexistant, et nous sommes revenus au cas de la ségrégation naturelle. La réalité se situe, en fait, entre ces cas extrêmes.

§ 2. Le problème de l'évaluation.

2.1. — Entre le moment où le prospecteur a reconnu une zone minéralisée et celui où le minerai sera prêt au transport vers l'usine de transformation, toute une série d'opérations va maintenant se dérouler.

En ce qui nous concerne ici, cette suite peut se partager en trois séquences relevant chacune d'un organisme différent et d'un point de vue différent. Nous nommerons ces organismes le *prospectant*, l'*évaluant* et l'*exploitant* (qu'ils existent ou non en tant que services distincts est une affaire d'organisation d'entreprise minière et dans laquelle nous n'avons pas à entrer ici).

2.2. — **Le prospectant** creuse un certain nombre de puits de même gabarit et disposés selon un réseau aussi régulier que possible ; il en extrait les couches minéralisées ou non, mesure leur *hauteur*, lave les graviers et détermine ainsi l'*accumulation* du minerai.

Ces deux mesures fondamentales sont entâchées d'erreurs qu'il s'agit de déterminer. Spécifions bien que nous parlons ici d'*erreurs locales*, inhérentes à chaque mesure, à chaque puits, erreurs qu'il s'agit, avant toute autre chose, de bien connaître et de réduire au maximum, sinon d'éliminer, ou, faute de mieux, d'en calculer les probabilités d'arrivée. Vu sous cet angle, le travail du prospectant est un *travail technique*, dont l'étude, en ce qui nous concerne ici, relève de la *théorie des erreurs de mesure*.

2.3. — **L'évaluant** compulse les résultats épurés de la prospection, et en déduit la *hauteur moyenne* et l'*accumulation moyenne* du gisement. Pour faire ce *travail mathématique* avec discernement, il doit faire appel à la statistique, à l'étude des dispersions et des courbes de fréquence.

Ses deux résultats fondamentaux sont entâchés d'er-

reurs que nous appellerons *intégrales* parce qu'elles intéressent l'ensemble du gisement. L'évaluant doit en déterminer les probabilités d'arrivée, afin que l'exploitant sache exactement à quoi s'en tenir sur les risques qu'il court.

Avant de faire ce travail, l'évaluant avait partagé le gisement en zones payantes et non payantes, en se basant pour cela sur certaines considérations d'ordre économique. Et à partir de ses moyennes, il détermine le tonnage à espérer et le cubage de terre à rejeter ou à traiter ; pour cela, il lui a fallu soigneusement surfacter ses placers.

Le travail de l'évaluant relève donc essentiellement de la *statistique mathématique*.

2.4. — **L'exploitant** s'emploie à extraire tout le minerai dont la vente lui assurera le bénéfice maximum. Ce faisant, il commet aussi des erreurs, qui seront à la fois d'ordre technique et financier, ces erreurs étant entendues ici dans le sens le plus large, allant depuis les pertes aux tables de lavage jusqu'à l'extension ou le rétrécissement des zones payantes prévues, en passant par les prévisions inexactes de rendement ou de teneur-limite, etc. Son travail relève avant tout de la technique industrielle et de l'utilisation rationnelle de la main-d'œuvre. Dans un certain sens, il est tributaire également de la théorie des erreurs de mesure et de la statistique surtout appliquée.

2.5. — Dans cet essai, nous passerons complètement sous silence le travail de l'exploitant, procédant toutefois à une courte analyse économétrique de la payabilité. Nous réserverons tout un chapitre à celui du prospectant, ou, plus exactement, à la théorie des erreurs de prospection. Enfin, le travail de l'évaluant, qui constitue l'objet fondamental de cette étude, prendra toute la seconde partie.



PREMIÈRE PARTIE

DES VARIABLES ET DES FONCTIONS UTILISÉES

§ 3. Sommaire.

3.0. — Si le problème de l'évaluation proprement dite relève de la statistique mathématique et rentre dans le cadre général des problèmes d'échantillonnage (à quelques restrictions près, cependant), il est d'abord tributaire de considérations techniques et économiques dont il convient de dire un mot avant toute autre chose.

L'évaluant manie des variables et des fonctions les unes *techniques*, les autres *économiques*; il nous faut soigneusement les définir et signaler certaines de leurs particularités. D'autre part, ces grandeurs les unes mesurées sur le terrain, les autres définies dans les bureaux des directions, présentent nécessairement un caractère aléatoire. Avant même d'en faire la statistique, leur variabilité et leur incertitude métrique doivent être connues.

Ces diverses études feront l'objet de cette première partie.

CHAPITRE PREMIER

VARIABLES ET FONCTIONS TECHNIQUES

§ 4. Sommaire

4.0. — Le travail du prospectant étant terminé, l'évaluant se trouve devant une surface minéralisée dont il ne connaît qu'un seul élément avec une honnête précision : l'*aire*, que nous noterons S . Cette aire est l'intégrale

$$S = \int ds$$

ou la somme, si l'on veut, de toutes les aires composantes ds ou Δs . La variable s n'est en rien, ou presque, aléatoire ; ce sera notre variable fondamentale à laquelle se rattacheront les autres.

Sous l'aire S s'étend un volume de terres à excaver et un tonnage de minerai à recueillir, et dont on ne connaît rien d'autre que des échantillons de hauteurs de couches et des échantillons d'accumulations ou de teneurs. Telles sont les variables et fonctions « techniques » que nous allons passer en revue maintenant, aussi systématiquement que possible.

§ 5. Variables et fonctions de volume.

5.1. — Considérons donc cette surface de terrain alluvionnaire ou éluvionnaire. Sans trop restreindre la généralité, nous pouvons la considérer comme plane et horizontale (dans le cas contraire, une correction de cosinus permet d'« aplanir » cette surface).

Si nous creusons verticalement le sol, nous allons rencontrer successivement, en général, une couche de recouvrement (rc), puis une couche de gravier (gr) puis le bedrock dont une couche (br) peut être intéressante à exploiter. L'ensemble de ces couches constitue la couche à excaver (ex) et nous avons, entre les hauteurs locales de ces couches la relation simple évidente :

$$h_{\text{ex}} = h_{\text{rc}} + h_{\text{gr}} + h_{\text{br}} \equiv \sum h_i$$

l'indice i étant employé lorsqu'on ne désire pas fixer la nature physique de la couche.

Cette subdivision de la couche à excaver est basée avant tout sur des conditions économiques : si par impossible un recouvrement était aussi minéralisé et aussi facile (ou difficile) à excaver que le gravier sous-jacent, on ne parlerait évidemment que d'une seule couche recouvrement-gravier. Par contre, si le recouvrement est d'une épaisseur telle qu'il faille l'excaver par paliers et que le prix de revient de ce travail change avec les paliers, il y aura lieu de considérer une ou plusieurs couches de plus dans les formules ; il en sera de même si l'on juge avantageux de rejeter directement une couche stérile de gravier (ou simplement non payante) sans l'envoyer à la table, etc.

Retenons donc que la distinction naïve des couches (rc), (gr) et (br) n'est qu'un cas particulier, le plus banal, du partage du volume à exploiter en sous-volumes d'importance différente pour l'exploitant. Les formules où figurent un indice i indéterminé présentent, elles, une généralité suffisante pour couvrir tous les cas.

5.2. — Soit Δs la surface du puits ainsi creusé et Δv_i le volume de couche i prélevé. On a les relations immédiates :

$$\Delta v_i = h_i \cdot \Delta s \text{ ou } h_i = \frac{\Delta v_i}{\Delta s} \text{ d'où : } h_i = \frac{dv_i}{ds}$$

ce qui montre que les fonctions « hauteur i » — échantillonnées par le prospecteur — se présentent comme les *densités surfaciques* d'une des grandeurs fondamentales intéressant l'exploitant, à savoir le volume.

5.3. — Quant aux **volumes** V_i contenus dans le gisement, ils se présentent comme des intégrales

$$V_i = \int_s dv_i = \int_s h_i \cdot ds \text{ avec } V_{\text{ex}} = \sum_i V_i$$

Inutile de rappeler que ces intégrales ne seront jamais connues avec précision. Il en sera de même pour les **hauteurs moyennes** (vraies) H_i et H_{ex} définies mathématiquement par

$$H_i = \frac{1}{S} \int_s h_i ds = \frac{\int_s h_i ds}{\int_s ds} \text{ avec } H_{\text{ex}} = \sum_i H_i$$

5.4. — Ces intégrales sont des limites de sommes, et l'on a avec une approximation dont nous nous contenterons, étant donné que l'intuition est mieux servie par du fini que par de l'infiniment petit :

$$H = \frac{\sum h_i \Delta s}{\sum_s \Delta s}$$

Appelons $\Delta s(h_i)$ une portion finie de surface telle que la hauteur de la couche i y soit partout constante et égale à h_i ; cette portion peut être d'un seul tenant ou au contraire partagée en éléments discontinus, non contigus, disséminés sur le terrain. La formule ci-dessus ne subit qu'un léger changement d'écriture

$$H_i = \frac{\sum h_i \Delta s(h_i)}{\sum_s \Delta s(h_i)}$$

mais son sens en devient tout différent : les surfaces $\Delta s(h_i)$ jouent ici le rôle de *nombre d'arrivées*, comme on dit en calcul des probabilités, et leurs rapports à S le rôle de *fréquences d'arrivée* ⁽¹⁾. On peut donner à ces surfaces le nom d'**aires d'influence** ou, improprement, de *surfaces d'influence*, vocable employé couramment par les prospecteurs, avec une acception légèrement différente toutefois.

Les nombres et les fréquences d'arrivées, dont nous venons de parler sont les grandeurs « vraies », par opposition aux grandeurs similaires « estimées » par la prospection.

5.5. — **Hypothèse des aires d'influence** : Nous désignons de ce nom l'hypothèse par laquelle on admet en pratique courante que *toutes les aires d'influence* $\Delta s(h_i)$ *sont des multiples entiers de la maille* μ ; en termes plus précis : multiples de l'aire μ de la maille du réseau régulier de prospection :

$$\Delta s(h_i) = n_{h_i} \mu$$

les coefficients n_{h_i} étant des fonctions de la hauteur h de la couche i et de la nature de celle-ci.

Dès lors, les différentes hauteurs moyennes H_i sont données simplement par :

$$H_i = \frac{1}{N} \cdot \sum n_{h_i} \cdot h_i$$

où

$$N = \sum n_{h_i}$$

est donc le nombre de puits de prospection. D'autre part, si l'on veut bien tenir pour distinctes deux hauteurs numériquement égales mais appartenant à des puits

(1) Ce raisonnement aurait très bien pu se poursuivre en employant les intégrales, mais celles-ci auraient dû alors être entendues au sens de Lebesgue. C'est pour éviter de devoir parler de cette notion que nous avons abandonné l'emploi des intégrales dans les formules.

différents, les formules de moyennes s'écrivent encore plus simplement :

$$H_i = \frac{1}{N} \cdot \Sigma h_i$$

Sous cette dernière forme l'hypothèse des aires exprime que *chaque* puits a la même surface d'influence, égale à la maille, et par conséquent indépendante de la nature de la couche.

Telles sont donc la formule banale et son interprétation ordinaire, telles que les admettent les prospecteurs. Inutile de dire que l'hypothèse des aires, qui en est la base, et qui revient à confondre la moyenne estimée avec la moyenne vraie, escamote toutes les difficultés d'ordre statistique.

§ 6. Variables et fonctions de tonnage. (1)

6.1. — Revenons à notre sondage, à notre puits de surface $\Delta_0 s$; lavons les différents volumes $\Delta_0 v_i$, nous en retirerons ainsi des tonnages (1) respectifs $\Delta_0 q_i$ d'un certain minerai, de la cassitérite, par exemple.

Nous donnerons le nom nouveau d'**accumulation** a_i à la *densité surfacique* de tonnage par couche i :

$$a_i \equiv \frac{\Delta_0 q_i}{\Delta_0 s} \text{ et à la limite : } a_i \equiv \frac{dq_i}{ds}$$

ou encore

$$\Delta_0 q_i = a_i \Delta s \quad \text{et} \quad dq_i = a_i ds$$

Ces formules sont absolument comparables à celles de 5.2; elles se présentent ici dans un ordre différent parce que, si la hauteur (ou densité surfacique de volume) est une donnée directe de l'expérience, l'accumulation est une donnée indirecte.

(1) Le mot « tonnage » sera systématiquement employé au lieu du mot « poids » auquel sera réservée l'acception statistique.

6.2. — Entre les accumulations des différentes couches existent des relations analogues à celles de 5.1 :

$$a_{\text{ex}} = a_{\text{rc}} + a_{\text{gr}} + a_i$$

et, plus généralement

$$a_{\text{ex}} = \sum_i a_i$$

Bien entendu, certaines de ces a_i peuvent être nulles ; en d'autres termes, certaines couches peuvent être stériles.

6.3. — Tout comme les volumes V_i , les tonnages totaux Q_i sont des intégrales :

$$Q_i = \int_s dq_i = \int_s a_i ds \quad \text{avec} \quad Q_{\text{ex}} = \sum_i Q_i$$

Les **accumulations moyennes** (vraies) A_i et A_{ex} sont donc aussi des rapports d'intégrales :

$$A_i = \frac{1}{S} \int a_i ds = \frac{\int_s a_i ds}{\int_s ds} \quad \text{avec} \quad A_{\text{ex}} = \sum_i A_i$$

6.4. — Abandonnant l'infiniment petit pour le fini petit, nous écrivons, comme en 5.4

$$A_i = \frac{\sum_s a_i \Delta s}{\sum_s \Delta s}$$

Si on introduit alors la notation $\Delta s(a_i)$ avec une définition toute semblable à celle énoncée à propos des hauteurs, la formule subit alors un léger changement d'écriture

$$A_i = \frac{\sum_s a_i \Delta s(a_i)}{\sum_s \Delta s(a_i)}$$

et une interprétation probabilistique, toujours comme en 5.4 : les *nombres d'arrivée* $\Delta s(a_i)$, qu'on peut appeler aussi *poids statistiques*, sont les *aires d'influence des accumulations*.

6.5. — Les $\Delta s(a_i)$ introduits ici sont à priori *bien distincts* des « poids » similaires présentés à propos des hauteurs ; l'*hypothèse des aires d'influence*, si on l'applique aux accumulations, est donc une *nouvelle hypothèse*, qui s'écrira

$$\Delta s(a_i) = n_{ai} \cdot a_i$$

Par un raisonnement analogue à celui de 5.5, elle conduit à la formule toute simple

$$A_i = \frac{1}{N} \Sigma a_i$$

Cette hypothèse a évidemment fait l'objet des plus vives critiques de la part de plusieurs auteurs ; nous aurons l'occasion de revenir sur ce point (2^e partie). Dans la pratique, d'ailleurs, les prospecteurs tempèrent cette hypothèse par des procédés empiriques de « pondération ».

6.6. — **Dualité Volume-Tonnage** : Il existe, comme on le voit, une dualité frappante entre les notions et les formules ayant trait aux volumes d'une part, aux tonnages d'autre part. Cette dualité peut permettre de simplifier les notations ; il suffira parfois, par exemple, de parler simplement de la distribution d'une *variable d'intensité* ou de *densité* z sans devoir spécifier s'il s'agit d'une hauteur ou d'une accumulation. On s'en inspirera aussi pour rédiger des *fiches de placer* où les données seront présentées en accord avec les symétries du problème de l'évaluation.

Le Tableau 6.6 met cette dualité en évidence tout en résumant toutes les formules vues jusqu'ici.

TABLEAU 6.6.		<i>Dualité Volume-tonnage</i>	
Grandeurs fondamentales pour l'exploitation :	Volume	Tonnage	
Variable d'extension : <i>aire</i> Extension totale :	s $S = \int ds$		
Variables d'intensité (densités surfaciques)	$h_i = \frac{dv_i}{ds}$	$a_i = \frac{dq_i}{ds}$	
Composition linéaire	$h_{ex} = \sum_i h_i$	$a_{ex} = \sum_i a_i$	
Intégrales fondamentales	$V_i = \int_s h_i ds$	$Q_i = \int_s a_i ds$	
Moyennes vraies	$H_i = V_i/S$	$A_i = Q_i/S$	
Moyennes vraies approchées	$\frac{\sum h_i \Delta s(h_i)}{\sum \Delta s(h_i)}$	$\frac{\sum a_i \Delta s(a_i)}{\sum \Delta s(a_i)}$	
Hypothèses des aires	$\Delta s(h_i) = n_{hi} \mu$	$\Delta s(a_i) = n_{ai} \mu$	
Moyennes banales	$H_i = \frac{\sum h_i}{N}$	$A_i = \frac{\sum a_i}{N}$	

§ 7. Variables et fonctions mixtes.

7.1. — Il nous faut maintenant examiner les rapports existant entre les deux familles de grandeurs dont nous venons de parler. Pour cela, revenons encore à notre puits de gabarit $\Delta_0 s$ et supposons que les couches en soient excavées par petits prismes de base $\Delta_0 s$ et de hauteur $\Delta_0 h$; l'accumulation ne sera plus que $\Delta_0 a$ et deviendra naturellement un infiniment petit da si $\Delta_0 h$ devient elle-même l'infiniment petit dh .

Ici nous introduisons donc un changement de notation : nous considérons h comme une variable allant depuis $h = 0$ au niveau du sol jusque $h = h_{\text{ex}}$ au niveau du bed-rock inexploitable. Nous appellerons alors **fonction de teneur** une fonction telle que l'on ait

$$a_{\text{ex}} = \int_0^{h_{\text{ex}}} t \, dh$$

intégrale que nous pouvons écrire aussi

$$a_{\text{ex}} = \int_{(h_{\text{ex}})} t \, dh$$

h_{ex} étant le domaine d'intégration. On aura de même pour la couche i de hauteur h_i :

$$a_i = \int_{(h_i)} t \, dh$$

On peut alors considérer une fonction $a(h)$ telle que l'on ait :

$$t = \frac{da}{dh}$$

a et t s'annulent donc aux endroits stériles.

7.2. — Une couche élémentaire d'épaisseur dh occupe dans un puits élémentaire ds un volume dv et contient une quantité dq de minerai. Comme on a

$$dv = dh \cdot ds \quad \text{et} \quad dq = da \cdot ds$$

il vient

$$t = \frac{dq}{dv}$$

dv et dq sont ici des *différentielles du 3^e ordre*, alors qu'elles n'étaient que du second (comme ds) dans les paragraphes précédents. Intégrées, elles donnent les intégrales triples :

$$Q_i = \int_{v_i} t \, dv \quad \text{et} \quad Q_{ex} = \int_{v_{ex}} t \, dv$$

7.3. — La fonction de teneur n'est pratiquement échantillonnable que si on lave pellicule par pellicule les couches du puits. Comme ce procédé n'est guère pratiqué, les prospecteurs mesurent non pas les valeurs t de la fonction de teneur, mais simplement des moyennes, qu'ils appellent *teneurs* tout court :

$$\bar{t}_i = \frac{1}{h_i} \int_{(h_i)} t \, dh = \frac{a_i}{h_i}$$

Si i est mis pour (gr), cette moyenne est la *teneur au gravier* ; si i remplace (ex), nous avons la *teneur à l'excavé*. On a ainsi

$$a_{ex} = \bar{t}_{ex} h_{ex} = \Sigma \bar{t}_i h_i$$

et, en particulier, la formule habituelle

$$a_{ex} = \bar{t}_{ex} h_{ex} = \bar{t}_{rc} h_{rc} + \bar{t}_{gr} h_{gr} + \bar{t}_{br} h_{br}$$

qui se réduit le plus souvent à

$$a_{ex} = \bar{t}_{ex} h_{ex} = \bar{t}_{gr} h_{gr}$$

7.4. — Si A et H sont respectivement l'accumulation totale moyenne et la hauteur totale moyenne d'un placer, la *teneur moyenne de placer à l'excavé* sera

$$T = \frac{A}{H} = \frac{A \cdot S}{H \cdot S} = \frac{Q}{V}$$

(nous avons supprimé les indices (ex) pour alléger l'écriture).

Ce nom de moyenne provient de ce que la dernière de ces égalités peut aussi s'écrire

$$T = \frac{\int_v t \, dv}{\int_v dv}$$

qui est bien une formule de moyenne mathématique, celle de la fonction t sur le domaine d'intégration (triple) $V_{(ex)}$. Si on remplace encore une fois ces intégrales par des sommes, on a :

$$T = \frac{\Sigma t \Delta v(t)}{\Sigma \Delta v(t)}$$

et les *poids* $\Delta v(t)$ peuvent être appelés des *volumes d'influence*. Or, ces volumes, dont l'extension dans la profondeur du gîte peut être absolument quelconque, dont la forme à trois dimensions peut être aussi capricieuse que possible, sont en définitive des grandeurs totalement inaccessibles à l'expérience, c'est-à-dire à la prospection ; par ailleurs, la fonction t ainsi moyennée n'est en général pas déterminable par la prospection ordinaire, ainsi que nous venons de le dire.

Dès lors, il vaut mieux raccorder T à des grandeurs plus accessibles. Mais alors, T n'apparaît plus du tout comme une moyenne, mais comme le *rapport des moyennes* A et H de deux variables aléatoires de densité a et h , chacune de celles-ci ayant d'ailleurs sur le terrain sa distribution propre et ses poids propres, respectivement $\Delta s(a)$ et $\Delta s(h)$. La teneur de placer T prend ainsi la forme compliquée

$$T = \frac{\Sigma_i \Sigma a_i \Delta s(a_i)}{\Sigma_i \Sigma h_i \Delta s(h_i)}$$

(le double Σ indique que l'on somme sur toutes les couches et sur tous les puits), forme qui ne présente plus du tout comme une moyenne.

Mais si l'on admet l'hypothèse des aires, et pour les hauteurs, et pour les accumulations, la formule se simplifie

$$T = \frac{\Sigma_i \Sigma (\bar{t}_i h_i) n_{ai}}{\Sigma_i \Sigma h_i n_{hi}}$$

et moyennant la même convention d'écriture qu'en 5.5, devient :

$$T = \frac{\Sigma \bar{t} h}{\Sigma h}$$

Cette dernière formule est de routine en prospection ; elle s'énonce « la teneur moyenne de placers est la moyenne pondérée des teneurs de puits, les poids respectifs étant les hauteurs des puits ».

Par contre, si l'hypothèse des aires est rejetée (et elle doit l'être d'une façon ou de l'autre), la dernière formule et son énoncé perdent tout leur sens.

Ce sont ces considérations, entre autres, qui nous ont fait rejeter les teneurs comme variables de base, ceci contrairement à l'habitude, et adopter à leur place les teneurs en surface ou *produits* $\bar{t}h$, grandeurs que nous avons dotées du nom nouveau d'*accumulations*.

§ 8. Fiches et cartes de placers.

8.1. — Passant momentanément sous silence les difficultés inhérentes à la limitation des placers et à leur évaluation, nous pouvons présenter maintenant un modèle de **fiche de placer** qui tienne compte, dans sa disposition, de toutes les formules que nous venons

d'énumérer, et en permette la vérification par un simple coup d'œil. Le modèle proposé s'applique au cas banal d'un gravier minéralisé accompagné d'un recouvrement stérile. Les formules dont il permet le contrôle immédiat sont :

$$\begin{array}{l}
 A = T_{gr} \cdot H_{gr} = T_{ex} \cdot H_{ex} = Q/S \\
 Q = T_{gr} \cdot V_{gr} = T_{ex} \cdot V_{ex} = A \cdot S \\
 V_{gr} = S \cdot H_{gr} \quad \text{et} \quad V_{ex} = S \cdot H_{ex}
 \end{array}$$

La fiche indique (voir tableau 8.1) :

verticalement : au centre : les données indépendantes des couches,

à gauche : les données au gravier

à droite : les données à l'excavé.

horizontalement : au-dessus : les données de la minéralisation,

en-dessous : les données du terrain.

La case laissée en blanc au bas de la fiche devra mentionner les conditions aux limites qui auront été imposées au placer en fonction des conditions économiques du moment et de la théorie adoptée pour la payabilité (voir chapitre suivant). Si l'on envisage plusieurs possibilités économiques, il y a lieu de faire plusieurs fiches ; celles-ci recevront alors un numéro qui figurera dans le coin inférieur droit de la fiche.

8.2. — Nous n'avons rien de spécial à dire ici en ce qui concerne les **cartes** de prospection, sinon qu'elles doivent être aussi simple et aussi schématiques que possibles, et qu'elles doivent reproduire, en cartouche, les fiches des placers qui y figurent ; si l'on envisage plusieurs possibilités économiques susceptibles de limiter différemment les placers, il vaut mieux alors dresser plusieurs cartes.

EXEMPLE

Okala II		cassitérite
		à l'excavé au gravier
2,363 kg/m ³		
Teneur limite : 0,350 kg/m ³		A

SCHEMA

Nom du placier		Minerai
		à l'excavé au gravier
Accumulation		
Valeur aux limites		N°

Si l'on veut — et ceci dans un but beaucoup plus théorique que pratique — on peut tracer, sur la carte, des réseaux d'*isoplèthes*, tel que le réseau des *iso-hauteurs*, celui des *iso-accumulations*, celui des *iso-teneurs*. Dans le cas de la payabilité simple, la frontière du placer sera une courbe de ce dernier réseau. On pourra aussi tracer les réseaux correspondant à certaines des variables économiques dont nous allons parler.

Étant donné la forte dispersion que présentent parfois ces grandeurs, ce travail de dessin peut se montrer décevant, et il n'est pas à conseiller en général ; il n'y a en effet rien de commun entre le filé de ces courbes et celui de courbes de niveau en topographie par exemple.

CHAPITRE II

VARIABLES ET FONCTIONS ÉCONOMIQUES

§ 9. Sommaire.

9.0. — Du point de vue de la statistique mathématique, le problème de l'évaluation présente une question assez spéciale et même originale, à savoir la délimitation des placers, c'est-à-dire le partage des gisements en zones payantes et zones non-payantes. Il s'agit là de la dichotomie d'une population, dichotomie toujours précaire d'ailleurs, parce qu'elle est tributaire de conditions économiques mondiales ou locales, du degré atteint par la mécanisation de l'exploitation, etc. La définition et la fixation de certaines *valeurs aux limites* (toujours représentées, dans ce qui suit, par des lettres avec asté-

risques) permet une évaluation ; leur modification entraîne une ré-évaluation, une nouvelle dichotomie de la population des puits.

Nous ne pouvons passer entièrement sous silence le difficile problème d'économétrie qu'est la définition des valeurs aux limites. Cette définition n'a qu'un but, permettre à la compagnie exploitante de réaliser le plus grand bénéfice possible. Cependant, il y a des cas où une courte étude montre que le bénéfice réalisé en suivant les méthodes classiques d'évaluation n'était pas le bénéfice maximum possible [16]. Aussi, dans un but de simple méthodologie avons-nous dénommé les deux paragraphes qui suivent *théorie du bénéfice simple* et *théorie du bénéfice maximum* ; ils auraient pu être également appelés « théorie de la payabilité en surface » et « théorie de la payabilité en profondeur ».

§ 10. Théorie du bénéfice simple.

10.1. — Traitons un chantier de V m³ ; cela va nous livrer Q kg de minerai, mais cela va nous coûter soit D francs, soit N unités ouvrières (heures de salaire, homme-jour, etc.) selon la façon que nous voudrons le compter. Posons

$$F = \frac{D}{N} \text{ fr/hj}$$

où hj est le symbole de l'unité ouvrière ; F est donc le prix de revient de cette unité.

D et F pourront se calculer à plusieurs *niveaux* : chantier, camp de travail, administration locale, administration générale ou métropolitaine. Sauf indication contraire, nous les supposons calculés au niveau le plus élevé.

10.1. — Supposons qu'il ait fallu n hj pour traiter 1 m³ à l'excavé ; en ce cas, le *prix de revient au m³* est (au niveau considéré)

$$\nu \equiv nF \quad \text{fr/m}^3$$

L'inverse de ν

$$r \equiv \frac{1}{\nu} = \frac{1}{nF} \quad \text{m}^3/\text{hj}$$

est le *rendement-ouvrier* ou *production-volume*, production en m³ par hj. Quant à n qui vaut donc

$$n = \frac{\nu}{F} \quad \text{hj/m}^3$$

on aurait pu l'appeler la *consommation-volume*.

Partons maintenant d'un autre point de vue : Supposons qu'il ait fallu m hj pour obtenir 1 kg de minerai ; alors, le *prix de revient au kg* (de minerai) est, au niveau considéré :

$$\mu \equiv mF \quad \text{fr/kg}$$

Quant à m , c'est la *consommation-tonnage*. Son inverse

$$p \equiv \frac{1}{m} \quad \text{kg/hj}$$

est le *rendement-métal* ou *production-tonnage*.

Toutes ces grandeurs sont reliées entre elles par la **première équation caractéristique de l'exploitation** :

$$\boxed{F \equiv \frac{D}{N} = \frac{\nu}{n} = \frac{\mu}{m}} \quad \text{ou} \quad \boxed{F = \nu \cdot r = \mu \cdot p}$$

10.3. — La *teneur à l'excavé* du placier exploité est

$$T = \frac{Q}{V} \quad \text{kg/m}^3$$

Comme il a fallu N hj pour mener à bien cette exploitation, on a

$$T = \frac{1/V}{1/Q} = \frac{N/V}{N/Q} = \frac{n}{m} \quad \dots \quad T = \frac{\nu}{\mu}$$

Et l'on a la **seconde équation caractéristique de l'exploitation** :

$$T = \frac{Q}{V} = \frac{\nu}{\mu} = \frac{n}{m} = \frac{\rho}{r}$$

10.4. — Soit μ^* le *cours du minerai* à un certain niveau (par exemple, rendu carreau mine, ou rendu au port, etc.).

Nous appellerons *teneur-limite* (moyenne) la grandeur

$$T^* = \frac{\nu}{\mu^*} \quad \text{kg/m}^3$$

qui est le rapport du prix de revient- m^3 au cours du minerai.

Le *rendement-métal-limite* sera la grandeur ρ^* dont l'inverse m^* est définie par

$$T^* = \frac{n}{m^*} \quad \dots \quad \rho^* = \frac{T^*}{n} = T^* r$$

C'est donc le rapport de la teneur-limite au nombre d'heures nécessaires pour le traitement de 1 m^3 .

Ces nouvelles données permettent d'écrire la **troisième équation caractéristique, l'équation aux limites** :

$$T^* = \frac{\nu}{\mu^*} = \frac{n}{m^*} = \frac{\rho^*}{r} = \frac{V^*}{Q}$$

V^* est le *volume-limite* correspondant à un tonnage donné Q . On peut aussi compléter par des termes aux limites la première équation caractéristique :

$$F = \frac{\mu^*}{m^*} = \mu^* \rho^*.$$

Cette dernière égalité exprime que le prix de revient de l'unité ouvrière vaut le produit du prix de revient-limite μ^* du minerai (c'est-à-dire le cours) par le rendement-métal-limite.

10.5. — Les définitions et les formules ci-dessus ne sont ni difficiles ni compliquées, mais elles sont nombreuses. Ceci provient de ce que le produit d'entrée de l'entreprise (terres à excaver) doit se compter avec des unités différentes de celles du produit de sortie (minerai au poids) ; et cette pléthore de définitions et de formules sera d'ailleurs caractéristique de toute entreprise de transformation où l'on doit manipuler des unités différentes à l'entrée et à la sortie. On peut toutefois réduire élégamment le nombre des formules en remarquant qu'elles se ramènent toutes à :

$$\begin{vmatrix} 1 & Q. & \nu. & n \\ 1/T & V & \mu & m \\ 1/T^* & V^* & \mu^* & m^* \\ r & X & F & 1 \end{vmatrix} = 0^3$$

Ce qui signifie que tous les *déterminants du 2^e ordre*, tels que

$$\begin{vmatrix} \nu & n \\ F & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} Q. & \nu \\ V & \mu \end{vmatrix}, \quad \dots \text{etc.},$$

extraits du grand déterminant ci-dessus, sont *tous nuls* (dans celui-ci, X est une grandeur sans intérêt, mise simplement pour compléter le tableau).

Pour nous résumer, explicitons les notations du déterminant :

1	tonnage	prix rev. ^t m ³	consom. vol.
inverse teneur	volume	prix rev. ^t kg	consom. tonn.
inv. teneur lim.	vol. lim.	cours	consom. lim.
rend ^t . ouvrier	X.	pr. rev ^t . un. ouv.	1

10.6. — La vente du minerai rapportera donc $Q\mu^*$ francs, mais son extraction aura coûté :

a) des frais D *dépendant* directement de la production

$$D = NF = \nu \cdot N/n = V\nu = Q\nu$$

b) des frais C *indépendants* de la production, ou immobilisations (frais de prospection, de routes,...).

L'expression

$$B \equiv Q\mu^* - V\nu - C$$

est donc le **bénéfice** ; suivant que B est positif, nul ou négatif, l'exploitation est bénéficiaire, inutile ou déficitaire.

Le bénéfice peut s'exprimer sous les différentes formes suivantes, toutes assez importantes dans les cas pratiques

$$\begin{aligned} B + C &= Q(\mu^* - \mu) = VT(\mu^* - \mu) = A \cdot S(\mu^* - \mu) \\ &= V\mu(T - T^*) = HS\mu^*(T - T^*) \\ &= V(\nu^* - \nu) = HS(\nu^* - \nu) \end{aligned}$$

$(\mu^* - \mu)$ est donc le bénéfice au kg de minerai, chose évidente ; $(\nu^* - \nu)$ est le bénéfice au m^3 , si l'on peut dire ; on a ici introduit la notion peu importante du *prix de revient-limite au m^3* :

$$\nu^* \equiv \mu^*T \quad \dots \quad \frac{\nu^*}{\mu^*} = \frac{\nu}{\mu}$$

10.7. — Posons

$$b = \frac{B + C}{S} ;$$

b est donc le *bénéfice au m^2* . Supposons alors que nous ayons affaire à un placer infiniment petit ; dans les formules précédentes, A et H se réduisent à leurs valeurs locales respectives a et h , et l'on a :

$$\begin{aligned} b &= (\mu^* - \mu)a = (\nu^* - \nu)h \\ &= \mu^*a - \nu h = \nu^*h - \mu a = \mu^*(a - T^*h) \end{aligned}$$

Nous pouvons alors légèrement changer de point de vue : b sera défini par les dernières formules, et appelé *variable d'intensité de bénéfice* (c'est donc la troisième densité surfacique à laquelle nous avons affaire) ; le point de vue pourra être encore élargi en considérant les paramètres μ et ν , qui étaient des moyennes fixes jusqu'ici, comme des variables changeant d'un point à l'autre ou tout au moins d'une zone à l'autre du gisement.

Dès lors, on retrouvera $B + C$ par une simple intégration. On pourra présenter les choses plus élégamment : C peut être considéré comme une constante d'intégration ; en d'autres termes, le *vrai bénéfice*, qui est B et non $B + C$, sera donné par :

$$B = \int_{s_0}^s (\mu^* - \mu)ads = \int_{s_0}^s (\nu^* - \nu)hds$$

ou par d'autres intégrales se déduisant des formules de b . La surface S_0 est simplement définie par

$$C = \int_0^{s_0} (\mu^* - \mu)ads = \int_0^{s_0} (\nu^* - \nu)hds$$

C'est donc la *surface minimum* que doit présenter un placer pour qu'il couvre ses propres frais d'immobilisations, notamment de prospection. En introduisant ainsi la constante d'intégration C , et la borne inférieure S_0 au lieu de zéro au domaine d'intégration, nous avons levé la contradiction de mot qui se présentait en appelant b le bénéfice au m^3 , alors que son intégrale sur S comportait autre chose que du pur bénéfice.

10.8. — Cette nouvelle variable b est donc une « combinaison linéaire »

$$b = \mu^*a - \nu h$$

des deux variables d'intensité fondamentale a et h ;

cette remarque peut être d'importance pratique dans certains problèmes de statistique (voir plus loin).

A la variable b est apparentée la variable c que nous pouvons dénommer l'*accumulation-bénéfice* :

$$c \equiv b/\mu^* = a - T^*h = a - a^*$$

où

$$a^* \equiv T^*h$$

est l'*accumulation locale limite* ; il s'agit bien d'une valeur locale, variable de point à point, à l'encontre de T^* qui est une constante de gisement et même d'exploitation.

Un endroit sera dit *payant en surface* si, en ce point,

$$c \geq 0 \quad \dots \quad a \geq a^*$$

En divisant les deux membres de l'inégalité par h , on retrouve la condition classique aux limites :

$$\bar{t}_{ex} = T^*$$

10.9. — Il est possible de tracer sur la carte du gisement, si l'on veut, les *isoplèthes économiques* (iso- b , iso- c , iso- a^*) dont les réseaux croiseront ceux des *isoplèthes techniques* du chapitre précédent ; et les remarques faites à propos de ces dernières s'appliquent également ici. Notons d'ailleurs que les iso-teneurs sont aussi les courbes d'isopayabilité, comme cela résulte de la relation $\bar{t}_{ex} \geq T^*$.

Dans le cadre des considérations simples (et simplifiées) développées jusqu'ici, la courbe iso- T^* sera la frontière du *placer payant au maximum* (ou des placers payants si cette courbe se partage en plusieurs courbes fermées). La chose se comprend d'elle-même : tout endroit payant non exploité représente une perte ; tout endroit non payant exploité représente aussi une perte. Une frontière tracée au hasard (ou même tracée très soigneusement, mais en se basant sur des considérations fausses !) né-

gligera des endroits payants et englobera des plages non payantes. Une pareille délimitation garantira donc toujours un bénéfice moindre que la frontière idéale où partout $\bar{t} = T^*$, frontière qui par définition n'englobe que des endroits payants, mais les englobe tous. Notons toutefois que cette délimitation n'a de sens que précisément parce qu'il existe un *champ* d'accumulation, parce qu'il y a eu une ségrégation large (1.3).

Un placer *idéalement* payant au maximum sera donc celui dont *tous les puits élémentaires* ds seront payants (en surface), c'est-à-dire où $c \geq 0$. Cette définition se complète nécessairement par celle du placer complémentaire, partout non payant : $c \leq 0$. Leur somme est le gisement, dont les limites ne sont pas économiques mais exclusivement géologiques. Les placers que nous venons d'ainsi définir ne sont pas nécessairement d'un seul tenant ; et une élévation de la teneur limite causera toujours un fractionnement des placers. Ce n'est là qu'une question de mots, peu importante ici.

La séparation d'un gisement en ses placers idéaux complémentaires ne sera jamais qu'un idéal inaccessible. Même si elle était théoriquement réalisable, son application rigoureuse serait souvent contre-indiquée : le fractionnement à l'extrême des placers amènerait des ruptures continues des fronts de taille, complication aussi onéreuse que désagréable à l'exploitation. Mais du point de vue théorique même, cette séparation rigoureuse se heurte à de très graves difficultés (cfr [7] ainsi que la seconde partie de cette étude). En définitive, on n'aura jamais que des placers « pratiquement payants au maximum » ce mot « pratiquement » couvrant même des cas où... l'exploitation aura été déficitaire ! Ceci pour dire qu'une étude théorique fouillée de la payabilité est quand même indispensable.

10.10. — Il faut cependant bien dissocier les deux

notions assez voisines de *teneur-limite* et de *teneur-frontière*, jusqu'ici confondues. Voici un cas où cette dissociation se fait d'elle-même :

Il peut être intéressant, pour des raisons d'ordre économique ou industriel, de rejeter des placers n'assurant pas un *bénéfice % en dehors minimum*. Le bénéfice % en dehors est :

$$B \% \equiv \frac{B + C}{V\nu} = \frac{Q\mu^*}{V.v} - 1 = \frac{T}{T^*} - 1$$

Si l'on exige un minimum $B\%_*$, on doit avoir : $B\% \geq B\%_*$ c'est-à-dire :

$$\frac{T^*}{T} - 1 \geq B\%_* \quad \therefore \quad T \geq (1 + B\%_*) \cdot T^*$$

soit, localement,

$$\bar{t} = T^0 \equiv (1 + B\%_*) \cdot T^* > T^*$$

Ici, la *teneur-frontière* T^0 est plus grande que la *teneur-limite*.

L'introduction de la surface minimum (10.7) conduisait d'ailleurs à la même dissociation, mais par d'autres moyens et pour d'autres raisons.

10.11. — La théorie de la *payabilité en surface*, telle que nous venons de la résumer ici est classique et bien connue, dans ses grandes lignes et dans ses applications pratiques, par tous les prospecteurs. Elle se base au fond sur une seule donnée, la *teneur à l'excavé* que l'on compare à une seule donnée économique, la *teneur-limite*. Elle suppose en outre, d'une façon implicite, la *constance du rendement-ouvrier* sur tout le gisement, et même sur tous les gisements d'une région. Pratiquement, elle suppose donc un tas de choses : que le prix de revient du rejet du recouvrement est nul ou négligeable, ou encore qu'on envoie le tout à la table, que

cette table ne doit pas être trop souvent déplacée (or, elle le sera plus dans les flats longs et étroits que dans les flats larges), que tout le gravier est uniformément minéralisé, etc., etc. Tout cela est trop beau pour être vrai, et il y a lieu d'examiner la réalité d'un peu plus près ; ce sera le but du paragraphe suivant (cfr aussi 28.16 et 17).

§ 11. Théorie du bénéfice maximum.

11.1. — Nous allons maintenant réintroduire la *fonction t de teneur* du chapitre précédent, fonction généralement ignorée des prospecteurs, qui se contentent de la moyenne \bar{t} prise sur le gravier — ou sur l'excaqué — d'un puits. L'apparition de cette fonction transforme les formules locales (10.7) en

$$\begin{aligned} db &= (\mu^* - \mu)da = (\nu^* - \nu)dh \\ &= \mu^*da - \nu dh = \nu^*dh - \mu da = \mu^*(da - T^*dh) \end{aligned}$$

puis, en posant

$$g \equiv \frac{db}{dh}$$

(g sera le *bénéfice au m³* ou densité en volume de bénéfice)

$$\begin{aligned} g &= (\mu^* - \mu)t = \nu^* - \nu \\ &= \mu^*t - \nu = \nu^* - \mu t = \mu^*(t - T^*) \end{aligned}$$

On retrouvera alors B par une triple intégration sur le volume $V - V_0$, V_0 étant le volume minimum, dont l'exploitation couvre les immobilisations C . Il est inutile de transcrire ici ces intégrales élémentaires.

Il faut toutefois remarquer un point important : pour prospecter la fonction t , il faut absolument laver les graviers sinon totalement tout au moins par échantillonnages de couches épaisses au plus de 10 cm ; ceci augmente nécessairement les frais de prospection et

laisse une marge un peu plus petite au pur bénéfice B. La relation entre les minima S_0 et V_0 n'est donc pas purement mathématique. Cette augmentation des frais de prospection pèsera d'ailleurs sur tout ce qui va suivre, et ne devra jamais être perdue de vue.

11.2. — Le bénéfice au m² b sera donc restitué à partir de g , bénéfice au m³, par une simple intégration le long de la hauteur à excaver h_{ex} :

$$b = \int_0^{h_{ex}} g dh = \int_0^{h_{ex}} \mu^* t dh - \int_0^{h_{ex}} \nu dh$$

Au ch. I, nous parlions toujours de h_{ex} comme étant la somme de couches partielles h_i dont nous ne spécifions guère alors la signification physique ; le moment est venu de le faire. h_{ex} se partage en au moins deux couches, la couche h'' qui sera traitée à la table et la couche h' qui ne le sera pas (qui sera rejetée sans plus), cette dernière pouvant naturellement ne pas exister, ceci selon le procédé d'exploitation. On a ainsi

$$h_{ex} = h' + h''$$

Notons bien que la couche h' n'est pas nécessairement stérile ; elle est simplement trop pauvre, non payante selon des critères de payabilité en profondeur qui sont à rechercher maintenant.

Nous pouvons dès lors réduire les intégrales précédentes en considérant μ^* et ν comme des fonctions discontinues à deux paliers :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{de } 0 \text{ à } h' : \mu^* = 0 \text{ (pas de minerai retiré)} \text{ et } \nu = \nu' \\ \text{de } h' \text{ à } h_{ex} : \mu^* = \text{cours officiel} \text{ et } \nu = \nu'' \end{array} \right.$$

ν' est donc le prix de revient au m³ rejeté, et ν'' le prix du m³ traité. On a ainsi :

$$b = \int_{h'}^{h_{ex}} \mu^* t dh - \nu' h' - \nu'' h''.$$

En réalité, ν' et ν'' ne sont guère des constantes, mais des fonctions des h . Par exemple, dans une exploitation manuelle, plus la profondeur du stérile augmente (en alluvions), plus le prix de revient du rejet augmente ; dans une exploitation hydraulique, plus il y a de stérile faible et friable, plus un jet de puissance et de consommation donnée a de rendement ; etc. Le simple partage de h_{ex} en h' et h'' ne suffit donc pas dans tous les cas ; parallèlement, la fonction ν ne peut toujours se contenter de deux paliers. On aura donc, en général :

$$b = \int_{h'}^{h_{\text{ex}}} \mu^* t dh - \sum_i \nu'_i h'_i - \sum_j \nu''_j h''_j$$

11.3. — On peut faire disparaître la dernière intégrale restante en introduisant la *teneur-table* ; c'est la teneur moyenne du gravier qui sera envoyé à la table :

$$\bar{t}_{\text{tb}} \equiv \frac{\int_{h'}^{h_{\text{ex}}} t dh}{h_{\text{ex}} - h'} = \frac{\int_{h_{\text{ex}} - h''}^{h_{\text{ex}}} t dh}{h''}$$

Dès lors, le puits sera payant si

$$\bar{t}_{\text{tb}} \geq \frac{1}{\mu^* h''} \left[\sum_i \nu'_i h'_i + \sum_j \nu''_j h''_j \right] \equiv \bar{t}^*$$

où \bar{t}^* est la *teneur-limite locale*. La teneur-limite perd donc le caractère intégral qu'elle possédait dans la théorie de la payabilité en surface. On définira de même l'*accumulation-limite* par

$$a^* \equiv \frac{1}{\mu^*} \left[\sum_i \nu'_i h'_i + \sum_j \nu''_j h''_j \right]$$

c'est donc une *combinaison linéaire* simple des différentes hauteurs du puits, et comme telle, son expression est nettement plus simple que celle de la teneur-limite locale. Et ceci renforce encore le choix, que nous avons fait dès le début, de l'*accumulation* plutôt que la teneur

comme variable fondamentale. La teneur ne joue de rôle vraiment simple et privilégié que dans la théorie naïve de la payabilité en surface ; son grand avantage est alors d'avoir une limite la même pour toute une exploitation, alors que l'accumulation doit se contenter de limites locales. Maintenant les rôles sont renversés ; la simplicité devient l'apanage de l'accumulation, et le caractère plus général de cette notion est bien mis en évidence. Par ailleurs, si le gravier a été entièrement lavé, ce qui s'impose plus ou moins ici, l'accumulation est une donnée expérimentale directe, plus directe que la teneur : c'est le poids trouvé divisé par le gabarit du puits.

La variable d'accumulation qui joue le rôle important est ici l'*accumulation-table*

$$a_{tb} = h'' \cdot \bar{t}_{tb}$$

C'est par rapport à elle que a_{tb}^* est une limite ; les puits payants sont définis par

$$a_{tb} \geq a_{tb}^*$$

Bien entendu, lorsque l'on envoie tout le gravier à la table, a_{tb} s'identifie à l'accumulation tout court.

On pourra aussi définir l'*accumulation-table-bénéfice*

$$c_{tb} = b/\mu^* = a_{tb} - a_{tb}^*$$

qui doit donc être positive dans les puits payants.

11.4. — Les formules ci-dessus seront un peu plus parlantes si l'on envisage l'un ou l'autre cas particulier :

a) $h' = 0$: tout est envoyé à la table ; les formules se ramènent à leurs correspondantes du paragraphe précédent ; plus explicitement, on a :

$$\bar{t}_{tb} = \frac{1}{h_{ex}} \int_0^{h_{ex}} t dh = t_{ex} \quad \text{et} \quad a_{tb} = t_{ex} h_{ex} = a_{ex} = a$$

$$\bar{t}^* = \frac{1}{\mu^*} \cdot \frac{\nu_{gr} h_{gr} + \nu_{rc} h_{rc}}{h_{gr} + h_{rc}} \equiv \frac{\nu}{\mu^*} \quad \text{et} \quad a_{tb}^* = \frac{1}{\mu^*} (\nu_{gr} h_{gr} + \nu_{rc} h_{rc})$$

ν est la moyenne pondérée des prix de revient

$$\nu \equiv \frac{\nu_{gr}h_{gr} + \nu_{rc}h_{rc}}{h_{gr} + h_{rc}}$$

En fait, nous ne revenons au cas de la payabilité simple que si \bar{t}^* est une constante égale à T^* , ce qui ne se produira que dans les cas suivants :

a) ou bien $\nu_{gr} \simeq \nu_{rc} = \nu$

β) ou bien si les hauteurs varient très peu de puits à puits. Alors on aura

$$\bar{t}^* = T^* \quad \text{et} \quad a_{tb} = a^*$$

Ce cas est donc celui où l'attention doit se porter sur la *teneur à l'excavé*.

b) $h' = h_{rc}$: tout le gravier est envoyé à la table, et lui seul ; tout le recouvrement (stérile) est rejeté. On aura :

$$\bar{t}_{tb} = \frac{1}{h_{gr}} \int_{h_{rc}}^{h_{ex}} t dh = t_{gr} \quad \text{et} \quad a_{tb} = t_{gr} h_{gr} = a_{gr} = a$$

\bar{t}^* et a_{tb}^* sont donnés par les mêmes formules qu'en a), à ceci près que ν vaut maintenant

$$\nu = \frac{1}{h_{gr}} (\nu_{gr} h_{gr} + \nu_{rc} h_{rc})$$

Ceci rentre dans la payabilité simple si l'on a

a) ou bien $\nu_{rc} \simeq 0$, d'où $\nu \simeq \nu_{gr}$;

β) ou bien si les hauteurs varient très peu de puits à puits. Alors, on aura encore une fois

$$\bar{t}^* = T^* \quad \text{et} \quad a_{tb}^* = a^*$$

Bien remarquer que les formules de a_{tb}^* sont rigoureusement les mêmes dans les deux cas a) et b), alors que celles de \bar{t}^* diffèrent par la définition du rendement global ouvrier.

Ce cas est celui où l'attention doit se porter sur la *teneur au gravier*.

c) comme en (b) : $h' = h_{rc}$, mais le recouvrement est tellement épais que, dans une exploitation manuelle, il nécessite une attaque par paliers et le double rejet d'une partie de sa hauteur. On doit donc considérer deux sous-couches

$$h_{rc} = h_{rc1} + h_{rc2}$$

et deux prix de revient pour la manipulation du recouvrement ; la couche h_{rc1} peut être considérée comme constante, et sa valeur sera fixée par l'étude du travail du pelleteur. On a encore

$$\bar{t}_{tb} = t_{gr} \quad \text{et} \quad a_{tb} = a$$

On a maintenant

$$a^* = \frac{1}{\mu^*} (\nu_{gr} h_{gr} + \nu_{rc1} h_{rc1} + \nu_{rc2} h_{rc2}) \quad \text{et} \quad \bar{t}^* = \frac{\nu}{\mu^*}$$

où

$$\nu = \frac{1}{h_{gr}} (\nu_{gr} h_{gr} + \nu_{rc1} h_{rc1} + \nu_{rc2} h_{rc2})$$

En dehors de la situation mathématiquement banale et pratiquement rare où toutes les hauteurs seraient à peu près égales de puits à puits, ce cas c) échappe tout à fait à la théorie de la payabilité simple ; il est toujours possible de définir, si l'on veut, une T^* moyenne, mais celle-ci n'est plus d'application pratique, puisque on a maintenant en général

$$\bar{t}^* \neq T^* \quad \text{et} \quad a_{tb}^* \neq a^*$$

a_{tb}^* et \bar{t}^* peuvent se déterminer par des tables ou des abaques. L'abaque de a_{tb}^* est particulièrement simple ; c'est un réseau de droites parallèles dans le plan des (h_{gr}, h_{rc}) ; si l'on veut prévoir plusieurs possibilités éco-

nomiques, l'abaque présentera alors plusieurs réseaux de parallèles. L'abaque de \bar{t}^* est moins simple et moins pratique.

d) $h' > h_{gr} > h''$ d'où $h' < h_{rc} < h''$; une partie du gravier est jugée trop pauvre pour être envoyée à la table, aussi est-elle rejetée avec le stérile. On a cette fois :

$$t_{tb} \neq t_{cx} \neq t_{gr} \quad \text{et} \quad a_{tb} \neq a$$

Posons

$$h_{gr} = h'_{gr} + h''_{gr}$$

(l'indice ' indiquant toujours ce qui doit être rejeté), et aussi (éventuellement) comme ci-dessus

$$h_{rc} = h_{rc1} + h_{rc2}$$

On a ainsi maintenant des formules à 4 paramètres ν_i :

$$a_{tb}^* = \frac{1}{\mu^*} (\nu'_{gr} h'_{gr} + \nu''_{gr} h''_{gr} + \nu_{rc1} h_{rc1} + \nu_{rc2} h_{rc2})$$

d'où l'on peut déduire, comme dans les cas précédents

$$\bar{t}^* = \frac{a_{tb}^*}{h''_{gr}} = \frac{\nu}{\mu^*}$$

Ce cas est un des plus typiques de ceux qui obéissent à la *théorie de la payabilité en profondeur*, que nous avons aussi appelée *théorie du bénéfice maximum* pour des raisons qui vont apparaître maintenant.

11.5. — Dans le cas d) que nous venons d'envisager, la densité de bénéfice sera

$$b = \int_{h'_{gr}}^{h_{ex}} \mu^* \cdot t \cdot dh - \nu'_{gr} h'_{gr} - \nu''_{gr} (h_{gr} - h'_{gr}) - f'_{rc}$$

formule qui se déduit des formules générales (11.2) et de celles du cas d) ; f'_{rc} désigne ici les frais de rejet du stérile, par exemple :

$$f'_{rc} = \nu_{rc1} h_{rc2} + \nu_{rc2} h_{rc2}$$

Ces frais sont toujours les mêmes pour un puits donné, quelle que soit la quantité de gravier que l'on veuille rejeter.

Si, pour une certaine hauteur h^* , le bénéfice est *extremum*, on aura, en ce point :

$$\frac{db}{dh'_{gr}} = 0$$

c'est-à-dire :

$$- \mu^* t(h^*) - v'_{gr} + v''_{gr} = 0$$

d'où

$$t(h^*) = \frac{v''_{gr} - v'_{gr}}{\mu^*}$$

formule qui fixe la *hauteur limite de gravier à rejeter* $h'_{gr} = h^*$, pour autant que l'on connaisse la fonction $t(h)$, pour autant aussi que l'extremum soit un maximum... et que la densité de bénéfice soit positive en ce point de maximum, bien entendu. Une **discussion** s'impose donc ici :

11.6. — D'après les expériences que nous avons eu l'occasion de faire sur le terrain, la fonction $t(h)$ se présente le plus souvent comme une courbe en cloche, assez asymétrique, et dont la fig. 11.6 (partie du dessous) donne assez bien l'idée. Son intégrale sera une courbe en S avec un point d'inflexion correspondant à la teneur maximum du puits ; comme toutes les teneurs sont positives, la courbe intégrale sera toujours croissante. La même fig. 11.6 (partie du dessus) donne l'allure générale de ces courbes.

Cette intégrale, rappelons-le, mesure le prix de vente du minerai retiré (au facteur μ^* près). Notamment son ordonnée finale $\overline{H_{ex}G_{ex}}$ mesure le prix de vente si tout le gravier est lavé. Sur la même figure, le point F_{rc} , d'abscisse h_{rc} , est tel que

$$\overline{H_{rc}F_{rc}} = f_{rc}$$

De ce point, faisons partir deux droites $F_{rc}A_{ex}$ et $F_{rc}B_{ex}$ de pentes respectives ν''_{gr} et ν'_{gr} . Ainsi, $\overline{H_{ex}A_{ex}}$ et $\overline{H_{ex}B_{ex}}$ mesurent respectivement les frais de traitement total et de rejet total du gravier. Appelons f_{ex} leur différence $\overline{B_{ex}A_{ex}}$. Si tout le gravier est traité, le bénéfice sera donc mesuré par le segment (orienté) $\overline{A_{ex}G_{ex}} = b_{rc}$ tandis que si tout ce gravier est rejeté, la perte est marquée par $\overline{H_{ex}B_{ex}} = -b_{ex}$.

Si maintenant on ne traite le gravier qu'à partir d'une certaine hauteur $h''_{gr} < h_{ex} - h_{rc}$, deux choses vont se passer : a) les frais vont être réduits ; b) la vente va être diminuée. Ces variations sont aisément déterminables par le graphique : Soit R_{ex} un point tel que

$$\overline{H_{ex}R_{ex}} = \overline{B_{ex}A_{ex}} = f_{ex}$$

La droite $H_{rc}R_{ex}$ a donc une pente qui vaut $\nu''_{gr} - \nu'_{gr}$; une ordonnée quelconque $H'A'$ la coupe en un point R' tel que

$$\overline{H'R'} = \overline{B'A'} = f'$$

cette grandeur f' n'est autre que la réduction subie par les frais de traitement du gravier, comme on peut très bien le voir en traçant la droite $B'C_{ex}$ de pente ν''_{gr} : l'ordonnée $\overline{H_{ex}C_{ex}}$ mesure les frais de travail (au m^3) dans les nouvelles conditions. D'autre part $\overline{H'G'}$ mesure tout simplement la diminution de la vente ; car la courbe intégrale se voit alors amputée de sa portion $\overline{H_{rc}G'}$, et, en d'autres termes, tout se passera comme si cette courbe était toute entière redescendue de $\overline{H'G'}$; dès lors, le point terminal G_{ex} sera descendu de la même quantité.

En définitive, la variation de bénéfice sera mesurée par le segment

$$\Delta b = \overline{G'R'} = \overline{H'R'} - \overline{H'G'}$$

Δb sera donc positif ou négatif suivant que le point R' est au-dessus ou en-dessous de G' .

On voit immédiatement que la valeur absolue $|\Delta b|$ passera par un maximum chaque fois que la tangente à la courbe intégrale sera parallèle à la droite $H_{rc}R_{ex}$, c'est-à-dire aura la pente $\nu''_{gr} - \nu'_{gr}$; en d'autres termes, on retrouve le résultat obtenu par voie analytique

$$\mu^* \cdot t(h^*) = \nu''_{gr} - \nu'_{gr} \quad (1)$$

L'extremum le plus proche de la fin du recouvrement est donc un maximum, l'autre un minimum (maximum de perte). Il n'y aura d'ailleurs pas nécessairement deux extrema de bénéfice : la forme de la courbe $t(h)$ montre que l'équation (1), qui détermine les extrema, peut avoir ou deux racines réelles, ou deux racines confondues, ou deux racines imaginaires, auquel cas les extrema n'existent plus.

11.7. — Portons, sur la figure 11.6, le point J_{ex} tel que

$$\overline{R_{ex}J_{ex}} = \overline{A_{ex}G_{ex}} = b_{rc}$$

et traçons JJ_{ex} parallèle à $H_{rc}R_{ex}$; cette droite rencontre la courbe intégrale en un point J d'abscisse h^0 ; $\overline{R^0J}$ mesure le Δb négatif correspondant à l'opération; comme

$$\overline{R^0J} = \overline{R_{ex}J_{ex}} = b_{rc}$$

la hauteur h^0 marquera le point de bénéfice nul. Quant aux points où le bénéfice sera le même (b_{rc}) que si l'on avait traité tout le gravier, ce seront h_{rc} (évidemment) et h_b pied de l'ordonnée passant par l'intersection R_b de la courbe et de la droite $H_{rc}R_{ex}$. Ces indications fixent l'allure de la courbe $b(h'_{gr})$ représentant l'évolution de la densité de bénéfice en fonction de la hauteur h'_{gr} de gravier rejeté (fig. 11.7. a).

Il reste à discuter du signe même du bénéfice; cela se

fera très aisément en considérant les différentes positions possibles de la droite JJ_{ex} :

a) Si JJ_{ex} est au-dessus de $H_{\text{rc}}R_{\text{ex}}$, le puits était déjà payant au sens de la payabilité en surface ; il le reste évidemment ici : *puits « surpayant »* (fig. 11.7, a ; cette figure correspond aux données numériques de la fig. 11.6).

b) Si JJ_{ex} est en dessous de $H_{\text{rc}}R_{\text{ex}}$, le puits était non payant au sens classique ; mais si JJ_{ex} se tient quand même au-dessus du point G^* , le puits est payant au sens actuel : c'est un *puits payant récupéré* (fig. 11.7, b).

c) Si enfin JJ_{ex} se tient en dessous du point G^* , le puits est *définitivement non payant* (fig. 11.7, c, d, e).

Les figures c, d, e, correspondent aux trois cas respectifs où les racines de (1) sont distinctes, confondues, inexistantes. La distinction de ces trois cas ne présente aucune utilité pratique, car on peut voir aisément que les cas (d) et (c) ne peuvent se produire que si le puits est définitivement non payant.

11.8. — Telle est donc, encore assez sommairement esquissée, la théorie de la payabilité en profondeur. Nous sommes persuadé que plus d'un praticien, lisant ce paragraphe, accusera l'auteur de s'être complu à jouer avec des $x...$ pour le plaisir, mais sans portée pratique. Nous répondrons que l'idée de cette théorie nous est venue sur le terrain, un jour en regardant les Noirs d'un chantier envoyer à la table, avec beaucoup de soins, du gravier supérieur quasi-stérile. Avec l'ingénieur témoin comme nous de ce spectacle, nous nous sommes écriés : « Quel beau massacre de bénéfices ! ». Ce fut l'origine de la théorie de la payabilité en profondeur, et nous fûmes les premiers étonnés des développements mathématiques inattendus qu'elle comportait...

Pareille théorie remet en question toutes les notions naïves et habituelles de la payabilité ; la notion de teneur limite est floue et fuyante, plus on la creuse, plus elle

tend à se dissoudre. Et tout n'est pas dit sur la question ; par exemple, nous avons considéré les coefficients ν comme constants ; or, il n'en est rien : Plus le gravier est riche, plus fréquents seront les clean-up, plus grand sera ν ; plus le flat est étroit, plus les déplacements des tables doivent être fréquents, plus ν sera grand, encore une fois. On consultera le remarquable article de R. TONNEAU [16] au sujet des délimitations optima à faire en tenant compte des variations du prix de revient au m³ (ou du rendement ouvrier). La méthode est encore une fois une méthode d'extremum : *le bénéfice doit être maximum*, et c'est cette condition qui fixe les *vraies valeurs aux limites* (cfr exemple numérique 28.17, plus loin).

Pour revenir à la payabilité en profondeur, rappelons d'abord encore une fois que cette théorie exige, pour son application, une prospection plus longue et plus coûteuse ; quant à l'évaluation, elle exige en principe le dessin d'une figure telle la fig. 11.6., et ce pour chaque puits si possible, bien que l'on puisse sélectionner les puits. La chose sera grandement facilitée si l'évaluant dispose de petits graphiques préfabriqués (ozalides) où figurent les droites de la fig. 11.6 ; la courbe intégrale se dessine très vite d'après les données et la prospection et se trace à vue, par interpolation, et sans difficulté. Il ne reste plus qu'à tracer la droite JJ_{er} de payabilité et la tangente parallèle à JJ_{er} (le graphique pourra utilement comporter comme fond un réseau de droites parallèles de pente $\nu''_{gr} - \nu'_{gr}$). Ces graphiques, parce que préfabriqués, devront tous avoir la même largeur $\overline{H_{rc}H_{ex}}$ l'échelle réelle des hauteurs du puits en cause y sera déterminée par un petit abaque de proportionnalité, qui peut être joint au graphique.

L'application pratique de la théorie est évidemment une question de discipline en prospection et en exploitation. En prospection : le gravier sera soigneusement

enlevé par couches de l'épaisseur d'un coup de pic chacune, et chaque couche extraite sera mélangée en tas par double rejet si possible ; de chaque tas on extraira quatre pans. Il va de soi que la méthode ne s'appliquera vraiment bien qu'avec des graviers fins et homogènes ; la présence de gros boulders rend cette extraction par couches quasi-impraticable, et par ailleurs elle bouleverse la fonction $t(h)$. Si le travail est fait par des pelleteurs entraînés, les couches seront sensiblement égales, et le prospecteur déduira leur hauteur par simple division à partir de la hauteur totale du gravier.

A l'exploitation, la principale difficulté sera d'obtenir des travailleurs qu'ils ne rejettent *que* la quantité prescrite de gravier ; quelle que soit la précision des calculs d'évaluation, cette quantité ne pourra être indiquée au chantier qu'en nombre de « coups de pic ».

Comme toute théorie, celle de la payabilité en pro-fondeur ne peut présenter qu'un idéal schématisé et vers lequel on ne peut que tendre. C'est l'art de l'ingénieur et du contremaître que de savoir s'approcher au maximum de pareils idéaux théoriques.

CHAPITRE III

LES ERREURS DE PROSPECTION

§ 12. Sommaire.

12.0. — La prospection est un échantillonnage, c'est-à-dire qu'elle ne mesure certaines grandeurs (volume, accumulation) que par prélèvements ; son résultat final

est donc entaché d'erreurs d'échantillonnage qu'il convient d'étudier.

Mais avant d'aborder cette analyse, il convient de se rappeler que la prospection est aussi une mesure physique (technique, si on veut) : le prospecteur *mesure* la teneur, l'accumulation, la hauteur d'*un* puits, de deux puits, etc... Ses mesures vont donc être entachées des *inévitables erreurs de mesure* ; le prospecteur est soumis là à la même loi que le physicien ou que l'astronome : l'imperfection des instruments. Une première étude s'impose donc, une banale étude d'erreurs instrumentales, mais qui doit être faite.

Lorsque le prospecteur se contente de ne laver qu'une partie de gravier de son puits — comme c'est presque toujours le cas pour la cassitérite notamment — il fait déjà cependant de l'échantillonnage. Heureusement, celui-ci est le plus simple, le plus classique que l'on puisse rêver (pour autant que le gravier du puits soit au préalable parfaitement mélangé), et son étude est tout aussi classique.

Aussi nous commencerons par un rappel tout ordinaire de quelques notions de la théorie des erreurs. On les trouvera toutes, avec plus de développements, dans les traités courants. Mais en les donnant ici, nous déblayons le chemin pour la seconde partie, préparant notamment le lecteur au contraste qui oppose la brave loi de dispersion de GAUSS, toujours d'application ici, aux lois plus complexes que nous serons forcé d'employer pour notre étude des erreurs d'évaluation.

§ 13. Éléments de la théorie des erreurs.

13.1. — La mesure d'une grandeur z peut être entachée de plusieurs erreurs :

a) les fautes : dues à la distraction, à la malhonnêteté, à l'erreur de principe. Dans ce qui suit, nous

supposons les fautes éliminées par la discipline de l'entreprise.

b) les erreurs systématiques : provenant du manque de justesse des instruments : mètre trop court, balance faussée, pan déformé ou systématiquement surchargé, foisonnement moyen mal supputé ... La caractéristique de ces erreurs est leur constance *pratique* en valeur et en sens. Nous les supposerons également éliminées grâce à un étalonnage soigneux des instruments, une détermination précise des constantes de base, et aussi par la discipline de l'équipe.

c) les erreurs accidentelles : ou erreurs tout court, tantôt plus tantôt moins et se groupant autour de la valeur 0. Elles sont dues à des causes multiples, variées, imprévisibles, et relèvent toutes du manque de sensibilité des instruments de mesure ou du manque de précision dans la technique opérationnelle. Cette indication des causes du mal est en même temps celle du remède mais le remède ne saura jamais agir au-delà d'un certain seuil que la meilleure technique du monde ne pourra jamais repousser jusqu'à l'infini de précision.

13.2. — Soit z_0 une valeur quelconque, possible ou non, trouvée ou non, de la grandeur aléatoire z ; soit z_i un résultat de mesure de z . On appelle **écart** par rapport à z_0 la grandeur

$$\epsilon_i \equiv z_i - z_0$$

Si par hasard z_0 est la « vraie valeur » Z de la grandeur z , l'écart devient ce que l'on appelle l'**erreur**

$$e_i \equiv z_i - Z$$

Soit \bar{z} la moyenne arithmétique d'une série de mesures ; on réserve le nom d'*écart* sans plus, aux écarts par rapport à la moyenne. L'erreur de la moyenne est donc

$$E = \bar{z} - Z$$

13.3. — Ce n'est que d'une façon purement académique que l'on peut parler de la « vraie valeur » Z , grandeur toujours inconnue aussi bien avant qu'après l'opération. Mais on peut émettre, au sujet de la vraie valeur et des erreurs, des hypothèses, des postulats dont l'expérience devra se charger de démontrer (ou non) le bien-fondé.

Ainsi, GAUSS a postulé en principe que : 1) deux erreurs accidentelles égales en valeur absolue ont des chances égales de se présenter ; 2) de toutes les valeurs de z , la moyenne \bar{z} est la plus probable, c'est-à-dire celle qui se présentera avec la probabilité maximum.

De là à prendre cette moyenne comme la meilleure valeur de z il n'y a qu'un pas. Et ce pas franchi, on peut admettre que les écarts vont suivre eux-mêmes le premier postulat. Dès lors, les deux postulats, combinés avec le théorème des probabilités composées, conduisent à l'expression mathématique de la loi bien connue de GAUSS.

Pour tous ceux qui se sont familiarisés au calcul des erreurs, ces postulats sont devenus des évidences. C'est justement pour cela que nous avons voulu les rappeler ici, parce que c'est précisément eux qu'il faudra attaquer lors de l'étude des erreurs d'évaluation.

13.4. — On appelle :

a) *erreur moyenne* : la moyenne des erreurs ; il est facile de voir qu'elle vaut l'erreur de la moyenne. D'après le premier postulat, l'erreur moyenne doit tendre vers zéro (au sens du calcul des probabilités) dès que le nombre de mesures augmente ; en effet, tout écart possède alors une chance de plus en plus grande de se voir revenir changé de signe. Dès lors, toujours au sens du calcul des probabilités, la moyenne tendra vers la vraie valeur.

b) *écart moyen* : la moyenne des écarts (par rapport à la moyenne) ; c'est une grandeur identiquement nulle :

$$\frac{1}{n} \sum e_i \equiv \bar{e}_i \equiv 0.$$

Cette identité qui relie entre eux les écarts, leur fait perdre un degré de liberté. Ce qui veut dire que si la moyenne de n mesures est donnée, on ne peut choisir arbitrairement que $(n - 1)$ écarts et non point n . Par contre, les erreurs constituent un système à n degrés de liberté.

On définirait de même l'*écart moyen du premier ordre* ou *premier moment par rapport à z_0* , la moyenne des écarts par rapport à z_0 quelconque. On voit aisément que ce moment n'est autre chose que l'écart de la moyenne par rapport à z_0 .

13.5. — Les *moments* constituent une vaste famille de paramètres. On peut les prendre par rapport à n'importe quelle valeur z_0 ; ainsi les erreurs ne sont autre chose que les moments par rapport à la « vraie valeur ». On peut aussi les prendre d'un ordre quelconque. Le moment $M_{z_0}^{(k)}$ d'ordre k par rapport à z_0 sera

$$M_{z_0}^{(k)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (z_i - z_0)^k$$

Le premier postulat de GAUSS implique notamment l'annulation de tous les moments d'ordre impair (pour n suffisamment grand et même théoriquement infini, bien entendu), lorsque ces moments sont pris par rapport à la vraie valeur ou à la moyenne.

Lorsque l'on dit « moment » sans plus, cela sous-entend « par rapport à la moyenne ». Le second moment est appelé la **variance**. Une formule assez simple, mais très importante dans la pratique des calculs, relie la variance à d'autres données : « La variance vaut la moyenne des carrés diminuée du carré de la moyenne. » En effet :

$$v = \frac{1}{n} \sum (z_i - \bar{z})^2 = \frac{1}{n} \sum z_i^2 - \frac{2}{n} \sum z_i \bar{z} + \frac{n}{n} (\bar{z})^2 = \bar{z}^2 - (\bar{z})^2$$

13.6. — Cette variance v (par rapport à la moyenne) est à distinguer soigneusement de la **variance vraie** V , ou second moment par rapport à la vraie valeur Z :

$$v = \frac{1}{n} \sum \epsilon_i^2 \quad V = \frac{1}{n} \sum e_i^2$$

Par un calcul analogue à celui du numéro précédent, on peut voir que

$$V = v + E^2 \quad (1)$$

La variance vraie est donc toujours plus grande que la variance trouvée. Ceci est d'ailleurs le cas pour toute variance calculée par rapport à une valeur quelconque $z_0 \neq \bar{z}$; les calculs sont exactement les mêmes, il suffit de remplacer Z par z_0 . On arrive ainsi à un des théorèmes fondamentaux du calcul des erreurs et de toute la statistique mathématique: « La moyenne minimise la somme des carrés des écarts », et par conséquent la variance.

La variance trouvée n'est évidemment qu'une *estimation* de la variance vraie. Il y a cependant moyen de trouver une estimation V' de V qui soit meilleure que v ; il suffit pour cela d'estimer E^2 ce qui est très facile: On a

$$E^2 = \frac{1}{n^2} (\sum e_i)^2 = \frac{1}{n^2} \sum e_i^2 + \frac{2}{n^2} \sum_{i \neq j} e_i e_j$$

Or, du premier postulat de GAUSS, il résulte que

$$\sum e_i e_j \simeq 0$$

On a ainsi

$$E^2 \simeq \frac{1}{n} V$$

et il vient V' comme estimation de V :

$$V' = \frac{\sum \epsilon_i^2}{n - 1}$$

Pour n très grand, il est indifférent de prendre n ou $n - 1$; mais pour les séries de mesures où n est petit (moindre que la trentaine, par exemple) la distinction est importante.

Pour éviter une confusion, il faut encore noter ceci : La variance vraie dont nous parlons est la variante vraie de la série des mesures qui ont été effectivement faites, et non celle de la série (infinie) de toutes les mesures possibles, autrement dit, c'est la variance vraie d'échantillonnage et non la variance vraie de la population-mère des mesures. V , V' et v se dispersent autour de cette dernière et convergent vers elle, toujours au sens du calcul des probabilités, bien entendu, lorsque n croît au-delà de toute limite. Si par contre on fait une infinité d'échantillonnages chacun de n mesures, 10 par exemple, V' se disperse réellement autour de la variance vraie de la population-mère, tandis que v se disperse autour d'une autre grandeur. v est une estimation biaisée, faussée, ce qui n'est pas le cas de V' .

13.7. — La discussion précédente est un exemple d'*analyse de variance*, un des plus puissants instruments de la statistique moderne. Revenons à l'équation 13.6. (1) ; V possède n degrés de liberté tandis que v n'en possède que $(n - 1)$. Le degré disparu, nous le retrouvons dans E^2 . Ce qui veut dire ceci : pour reconstituer artificiellement la série de mesures obtenue, je peux suivre deux voies : ou bien me donner les n erreurs, ou bien me donner la moyenne et $(n - 1)$ des écarts. L'équation (1) analysant la variance a pour sœur l'équation ci-après (2) analysant les degrés de liberté :

$$\left\{ \begin{array}{l} V = v \quad + E^2 \\ n = (n - 1) + 1 \end{array} \right. \quad (1)$$

$$\left. \vphantom{\left\{ \right.} \right. \quad (2)$$

Si donc on veut estimer V au moyen des écarts et non des erreurs (absolument inconnues d'ailleurs), il est tout

logique de se servir du nombre $(n - 1)$ et non de n . Cette analyse se généralise sans difficulté ; on peut concevoir des infinités de cas où n se décomposera en $(n - s)$ et s , et mêmes des cas encore plus généraux où n se décomposera en une somme de plus de deux termes. Nous aurons à reparler de ceci dans la seconde partie.

13.8. — On appelle *erreur quadratique* la racine carrée de la variance vraie ; *écart quadratique*, la racine carrée de la variance trouvée, ou plus exactement de la variance estimée V' . On le désigne en général par la lettre σ .

13.9. — Soit l une variable aléatoire se présentant comme une combinaison linéaire de m variables aléatoires :

$$l = \alpha \cdot a + \beta \cdot b + \dots + \kappa \cdot k$$

où $\alpha, \beta, \dots, \kappa$ sont des constantes. Sans restreindre la généralité, on peut toujours supposer la combinaison *normée*, c'est-à-dire supposer que

$$\alpha + \beta + \dots + \kappa = 1$$

Nous avons rencontré de pareilles combinaisons au chapitre des variables économiques ; celles-ci sont toujours des combinaisons linéaires de variables techniques.

On peut démontrer en toute généralité le *théorème de la combinaison linéaire des variances*, valable seulement si les variables sont *indépendantes* :

$$v_l = \alpha^2 \cdot v_a + \beta^2 v_b + \dots + \kappa^2 \cdot v_k$$

En particulier, si

$$\alpha = \beta = \dots = \kappa = \frac{1}{m}$$

il vient

$$v_l = \frac{1}{m^2} \Sigma v_a$$

et

$$\sigma_l = \frac{1}{m} \sqrt{\Sigma \sigma_a^2}$$

formules assez capitales que nous allons appliquer à deux cas particuliers importants :

a) Soit

$$L = ml = a + b + \dots + k$$

Il vient tout de suite

$$v_L = \Sigma v_a ; \quad \sigma_L^2 = \Sigma \sigma_a^2$$

la variance d'une somme de variables aléatoires indépendantes est égale à la somme des variances.

b) Considérons a, b, \dots, k comme des mesures z_i d'une même grandeur aléatoire z ; alors, m c'est le n de tout-à-l'heure, et comme on a

$$v_a = v_b = \dots = v_k = v$$

il vient

$$v_{\bar{z}} = \frac{1}{n} v$$

$$\sigma_{\bar{z}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sigma_z$$

Ces formules résument le théorème classique : « La précision de la moyenne s'accroît comme la racine carrée du nombre des mesures ».

13.10. — Si les variables composantes ne sont plus indépendantes, toutes les conclusions du n° précédent deviennent caduques ou même grossièrement inexactes. a et b seront dites dépendantes si l'apparition d'une valeur a_i conditionne l'apparition d'une valeur b_i ; par exemple, si a_i étant supérieure à la moyenne \bar{a} , il existe de fortes chances pour que b_i soit elle-même supérieure à la moyenne correspondante \bar{b} , et vice-versa. La dépendance, au sens statistique, s'exprime mathématiquement par l'apparition de *covariances non nulles*, covariances

qu'on appelle aussi **moments rectangulaires**; par exemple :

$$C(a, b) = \frac{1}{p} \sum (a_i - \bar{a}) \cdot (b_i - \bar{b})$$

Il suffit d'essayer de faire la moyenne de $(l - \bar{l})^2$ pour voir automatiquement apparaître les covariances, lesquelles, n'étant plus nulles maintenant, vont compliquer toutes les formules précédentes. Tout se passe comme si la variable l avait perdu de ses degrés de liberté, et dès lors la variance de la moyenne risque de s'accroître. Nous n'avons rien à dire de plus à ce sujet ici, l'interdépendance des variables ne semblant pas s'appliquer au cas des erreurs de prospection.

13.11. — **Loi de Gauss ou loi normale** : GAUSS admet que la probabilité d'une erreur comprise entre ϵ et $\epsilon + d\epsilon$ est de la forme $\theta(\epsilon)$, $d\epsilon$. Le postulat de la moyenne le conduit alors à la loi différentielle

$$\frac{d \log \theta}{d\epsilon} = - \frac{\epsilon}{\sigma^2}$$

Une intégration immédiate donne

$$\theta(\epsilon) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp \left(- \frac{1}{2} \frac{\epsilon^2}{\sigma^2} \right);$$

la constante figurant devant l'exponentielle « norme » la fonction, c'est-à-dire rend son intégrale égale à l'unité :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \theta(\epsilon) d\epsilon = 1$$

$\theta(\epsilon)$ est l'exemple le plus classique d'une *loi de distribution*. Sa représentation graphique (*histogramme*) est la célèbre courbe en cloche, en chapeau de gendarme. Elle est symétrique par rapport à la moyenne, comme le veut le second postulat de GAUSS. Elle est d'autant plus pointue que σ est petit ; $1/\sigma$ ou $1/v$ donnent donc

des mesures de la précision avec laquelle on a travaillé en mesurant z .

13.12. — La **courbe intégrale**

$$\Theta(\epsilon) \equiv \int_{-\infty}^{\epsilon} \theta(\epsilon) d\epsilon$$

dite ligne des fréquences ou encore *ogive de Galton* est une courbe en S dont le point d'inflexion correspond au maximum de la courbe de GAUSS (histogramme). Plus la série est précise, plus la tangente en ce point d'inflexion tend à se redresser. $\Theta(\epsilon)$ est une transcendante dont on trouvera les tables dans tous les traités (et une représentation graphique en fin de ce travail). Ces tables donnent Θ en *unités standart*: moyenne nulle et variance unité (le graphique 26.3 peut servir de table approximative).

13.13. — **Invariance de la loi de Gauss** : La loi de GAUSS jouit d'une propriété capitale d'invariance : Si plusieurs variables aléatoires *indépendantes* obéissent séparément à la loi de GAUSS, il en va de même pour toute combinaison linéaire de ces variables, notamment de leur somme et de leur moyenne.

13.14. — **Théorème de Laplace-Liapounoff** (*Central Limit Theorem*) : Quelle que soit la façon dont se distribuent les valeurs aléatoires z autour de leur vraie valeur Z , les moyennes \bar{z} d'un échantillonnage comprenant n mesures tendent à se distribuer autour de Z selon une loi de GAUSS lorsque $n \rightarrow \infty$.

13.15. — Il était bon de rappeler ici ces deux théorèmes classiques parce que :

a) la somme des erreurs de prospection obéit à une loi de GAUSS ;

b) l'opération du mélange du gravier réalise les conditions du théorème de LAPLACE, que ce soit à la prospection ou à l'exploitation ;

c) le théorème de LAPLACE ne s'applique aux moyennes d'évaluation qu'avec certaines restrictions dont nous parlerons plus loin.

Disons enfin que les trois grandes classes d'erreurs énumérées au § 2 (prospection, évaluation, exploitation) étant indépendantes l'une de l'autre, leurs variances s'additionnent :

$$v_{\text{total}} = v_{\text{prospect}} + v_{\text{évaluat.}} + v_{\text{exploit.}}$$

ce qui entraîne les remarques pratiques ci-après :

1) avant toute chose, il faut essayer de réduire les erreurs de prospection ;

2) il est inutile de les réduire au-delà d'un certain seuil, c'est-à-dire d'une fraction des erreurs d'évaluation ;

3) avant que de juger de la précision d'une prospection et d'une évaluation, il ne faut pas oublier que les erreurs d'exploitation peuvent être considérables.

§ 14. Les erreurs de prospection. Cas du lavage total.

14.1. — Soit, pour un puits donné, s la surface, q le résultat des pesées de minerai après lavage de *tout le gravier* (nous ne nous plaçons donc ici que dans le cas banal de la payabilité en surface). Cette méthode de lavage total, longue et coûteuse, mais précise comme on va le voir, donne directement l'accumulation du puits :

$$a = q/s$$

Le lavage total est la somme des lavages de m pans donnant chacun q_1, q_2, \dots grammes de minerai ; on a ainsi :

$$q = \sum_{j=1}^m q_j$$

La variance de puits sera donc la somme des variances de pan, et si celles-ci sont toutes égales, on aura :

$$v_{\text{puits}} = m \cdot v_{\text{pan}} \quad \sigma_{\text{puits}} = \sqrt{m} \cdot \sigma_{\text{pan}}$$

14.2. — Le pannage et la pesée comportent des erreurs dues au remplissage, au calibrage des pans, au lavage, au soufflage, à la pesée, au triage, erreurs toutes pratiquement indépendantes, et au sujet desquelles peut s'appliquer la formule de l'additivité des variances

$$v_{\text{pan}} = v_{\text{calib.}} + v_{\text{repl.}} + v_{\text{lavage}} + v_{\text{souff.}} + v_{\text{triage}} + v_{\text{pesée}}$$

a) **Le calibrage** peut comporter une erreur systématique (comme d'ailleurs presque toutes les opérations que nous envisageons ici), mais cette erreur peut elle-même fluctuer (emploi de plusieurs récipients) ; comme ces fluctuations seront en général minimales, nous les confondrons avec celles dues au remplissage.

b) **Le remplissage** fluctue plus ou moins selon la qualité de l'équipe ; nous estimerons son erreur à 3 % maximum. Celle-ci ne joue d'ailleurs aucun rôle dans le cas du lavage total, mais elle est alors remplacée par une autre erreur, celle due aux pertes ou aux adjonctions de terres étrangères au volume à laver, et que nous estimerons aussi à 3 %.

c) **Le lavage** entraîne peu de pertes, et jamais de gains ; mais comme le **triage** mal fait peut entraîner surtout des gains illégitimes de matière, nous combinerons les deux erreurs en une seule, très faible, estimée à 2 %.

d) **Le soufflage** peut occasionner des pertes de fine (soufflage trop fort) ou des gains de minerais étrangers (soufflage trop faible) ; nous estimons à 2 % cette nouvelle erreur.

e) **La pesée** peut être poussée assez loin pour éviter des erreurs supérieures au 1 % ; nous admettrons cependant le chiffre pratique de 3 %, en remarquant en outre que ce chiffre est en général dépassé, pour les petits poids, dans les circonstances de la pesée en brousse.

On a ainsi, pour la variance relative

$$v_{\text{pan}} \cong 9 + 4 + 4 + 9 = 26 \%^2 \therefore \sigma \cong 5 \%$$

Rappelons que l'erreur 2σ est considérée comme l'erreur maximum pratique ; dans le cas d'une distribution gaussienne, c'est une erreur qui n'a même pas 5 % de chances d'être passée dans un sens ou dans l'autre. Ainsi, un pan d'une dizaine de grammes présentera une erreur maximum pratique de 1 gramme.

D'après le théorème des variances, une pesée de 100 pans de 10 g chacun aura le contenu d'un pan comme erreur maximum, soit seulement 1 % du kilotage total du puits.

Il reste bien entendu que les erreurs ici envisagées ne sont que les erreurs accidentelles. Le lavage, par exemple, comportera toujours une erreur systématique qui, pour les minerais fins, pourra être considérable, et dépasser les 10 %. Mais cette erreur se retrouvera à la table d'exploitation et sera ainsi indécélable, sauf par des travaux appropriés de laboratoire. Elle ne sera pas constante mais se dispersera avec une certaine variance qui, pour le compte de l'erreur finale, s'ajoutera à la variance due à la table.

14.3. — Si l'on prend les variations relatives (ou logarithmiques) de l'accumulation, il vient :

$$\frac{\Delta a}{a} = \frac{\Delta q}{q} - \frac{\Delta s}{s}$$

d'où l'équation aux variances *relatives* :

$$v_a = v_q + v_s.$$

L'erreur de surface du puits est due non seulement à la différence pouvant exister entre le gabarit idéal et le rectangle réellement tracé sur le terrain, mais aussi aux variations de la coupe horizontale avec la hauteur. Si

nous estimons à 5 % l'erreur de surface, il vient, pour l'erreur relative d'accumulation sur tout le puits :

$$\sigma_a = \sqrt{\frac{26}{m} + 25} \cong 5 \%$$

L'erreur à craindre pour l'accumulation serait donc de 11 % environ. Donc, pour des accumulations de l'ordre de 500 g/m², le calcul ne devra pas être poussé plus loin que le 1/2 décagramme ; et pour celles de l'ordre de 1.000 g/m², l'approximation du décagramme suffira. Les documents de prospection pourront donc se contenter d'indications en décagrammes : $a_1 = 0,98$; $a_2 = 2,24$ kg/m², etc. Et retenons comme **règle pratique** :

lavage total : accumulation en décagrammes

14.4. — Comme la teneur moyenne du puits est donnée par

$$\bar{t} = a/h$$

on arrive, comme pour l'accumulation, par variation relative ou logarithmique, à la relation des variances :

$$v_t = v_a + v_h$$

La mesure d'une baguette de hauteur peut se faire à moins de 1 cm près, mais la délimitation de la baguette elle-même est évidemment moins précise. De toute façon, la hauteur à mesurer n'est qu'une hauteur moyenne, et nous estimons que cette détermination ne peut se faire qu'avec un σ de 2 %, ce qui nous conduit à une erreur à craindre de 11 à 12 % sur la teneur. C'est à cause de l'erreur possible sur h que la teneur est une donnée moins précise que l'accumulation. Il faut aussi noter que la teneur est non seulement moins précise mais moins juste que l'accumulation, car l'erreur systématique de hauteur due à du passage de stérile dans le gravier n'affecte que la teneur (au gravier).

§ 15. Les erreurs de prospection. Cas du lavage partiel.

15.1. — Le résultat direct des mesures est ici une *teneur*; c'est bien évident, car après pesée le prospecteur déclare avoir trouvé q grammes *par* fournée de m pans. Comme cette teneur t' est exprimée en $\text{gm}/(m \text{ pans})$, il faut la ramener aux unités ordinaires, les g/m^3 , en introduisant un *facteur de dimensions*

$$K = M \text{ pans}/\text{m}^3 \text{ gravier}$$

qui tient compte des *dimensions* des pans et du *foisonnement* des terres. On obtient

$$t = K \cdot t' = q \frac{M}{m} \text{ g}/\text{m}^3$$

Enfin, s'il existe des *boulders* en proportion β , le volume réel du gravier foisonnable n'est plus V , mais

$$(1 - \beta) \cdot V$$

Autrement dit, le prospecteur a mesuré une teneur trop forte, puisque les *boulders* n'entraient pas dans ses pans. Ce que l'on peut traduire en disant qu'on n'a pas $M \text{ pans}/\text{m}^3$ dans le puits, mais seulement

$$(1 - \beta)M$$

D'où

$$t = (1 - \beta) \frac{M}{m} q \text{ g}/\text{m}^3$$

soit finalement

$$a = t \cdot h = (1 - \beta) \frac{M}{m} qh \text{ g}/\text{m}^3$$

15.2. — L'erreur affectant q est la résultante non seulement de celles étudiées au § précédent, mais en outre de l'erreur de mélange. Si le mélange est parfait, q sera partout le même, quel que soit l'endroit du gravier (mêlé) d'où l'on extrait le ou les pans. Par contre,

si le mélange n'a pas été fait, q variera fortement de place en place dans le tas de gravier ; avec des graviers mal mélangés nous avons observé des erreurs σ sur q dépassant les 150 %.

C'est entre ces deux cas schématiques extrêmes que se situe la réalité : le mélange, fait selon les règles du double rejet, de l'inquartation, est plus ou moins parfait, et sa qualité dépend de la criblométrie des minerais en présence, de leur rugosité, de leurs densités, etc. Pour des essais de cassitérite, nous avons trouvé des σ relatifs de l'ordre de 15 à 30 % dans un même gravier fin pour deux puits quasi-contigus ; de 17-18 % dans un puits de gravier argileux. Nous prendrons donc un σ de 20 % pour m pan, et il nous faut maintenant calculer le σ relatif à m pans.

Les formules vues en 13.9.b supposaient implicitement que la population des z_i était infinie ou tout au moins d'un effectif $p \gg m$. Pour les appliquer ici, il faudrait admettre que le nombre total p des pans contenus dans tout le gravier du puits est incomparablement plus grand que celui des 4 ou 8 ou 16 pans prélevés ; avant d'admettre cette hypothèse, il faut d'abord discuter des résultats que donnent les formules plus précises, relatives aux échantillonnages de populations finies. On démontre que si σ est l'erreur d'un pan, et si l'on prélève m pans sur une population de p pans, l'erreur quadratique du prélèvement est donnée par

$$\sigma_m^2 = \frac{p - m}{p - 1} \cdot \frac{\sigma^2}{m}$$

Pour $p = 60$ et $m = 16$, le facteur correctif est de l'ordre de $3/4$; avec 8 pans, de l'ordre de 85 % ; avec 4 pans, de 95 %. Pour $p > 60$, ce qui est assez normal, et m valant de 4 à 8 pans, le facteur correctif est de l'ordre de 0,9 minimum ; comme on ne peut prétendre avoir estimé σ à 10 % près de sa valeur, on pourra donc, dans la

plupart des cas ordinaires de la prospection, se contenter des formules 13.9.b et négliger le facteur correctif. On aura ainsi

pour 4 pans,

$$\sigma_4 = \frac{\sigma}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2} \sigma$$

pour 8 pans

$$\sigma_8 = \frac{\sigma}{\sqrt{8}} \cong \frac{1}{3} \sigma$$

pour 16 pans

$$\sigma_{16} = \frac{\sigma}{\sqrt{16}} = \frac{1}{4} \sigma$$

Selon la loi classique, il faut donc laver 4 fois plus de pans pour obtenir une précision double. On peut dire qu'avec des graviers difficilement mélangeables ($\sigma > 30\%$), il n'est pas exagéré de prélever 8 pans par puits.

Notons enfin ceci : si le mélange est mal fait, non seulement σ risque d'être grand, mais la loi de distribution du minerai dans le gravier peut ne plus être gaussienne. Les teneurs se groupent par paquets et la dispersion est plus forte que ne voudrait la loi de GAUSS. Ce qui veut dire que l'erreur maximum à craindre, avec ses moins de 5 % de chances d'arrivée, sera alors plus grande que 2σ (cfr 19.8).

15.3. — Le calcul habituel de variance nous conduit ainsi à une erreur à craindre de 42 % par pan, que nous forcerons à 50 % pour tenir compte du caractère non gaussien éventuel du mélange (le facteur d'environ 1,2 ainsi introduit est un exemple de ce qu'on appelle les *coefficients de dispersion*). Cette erreur tombe à 25 % pour 4 pans et à 18 % pour 8 pans.

On remarquera que l'erreur de pesée ne joue qu'un rôle absolument négligeable dans toute cette combinaison d'erreurs. Lorsque le prospecteur ne devra travailler

que par prélèvements de quelques pans, il est donc absolument inutile de le doter de fragiles et coûteuses balances de précision. Une bonne et robuste balance donnant le demi-gramme à lecture directe sera pratique et plus que suffisante (ne pas oublier d'étalonner ces balances tous les ans).

15.4. — **L'erreur de foisonnement** peut être assez grave ; avec un gravier idéal, nous avons trouvé 8 % d'erreur sur le nombre (moyen) \bar{M} , lequel différait déjà systématiquement de 7 % du M théorique alors adopté, et qui était de 120. D'après des essais faits par d'autres, on peut compter en moyenne sur une erreur quadratique de 10 à 15 %, soit donc 20 à 30 à craindre.

Nous estimons donc qu'au cours de toute prospection, il est absolument indispensable de procéder, par gisement, à un *minimum de 4 lavages totaux*, + 1 par cinquantaine de puits, afin de pouvoir se faire une idée de l'erreur de mélange et de l'erreur accidentelle de foisonnement, et surtout afin d'éliminer l'erreur systématique de foisonnement, qui est impardonnable.

15.5. — Il n'existe aucune méthode pratique pour *mesurer*, avec tant soit peu d'exactitude, la proportion β de **boulders** non pannables. Leur estimation est livrée à l'art des prospecteurs. Ceux-ci estiment qu'on peut arriver à déterminer β à ± 5 ou 10 % (absolus) près, ce qui fait, pour un binôme $1 - \beta$ de l'ordre de 0,9 une erreur à craindre de 8 % (relatifs) près.

15.6. — Le rôle de **l'erreur de hauteur** est assez complexe et important dans le cas du lavage partiel. Il faut nettement distinguer *l'erreur de situation* des couches et *l'erreur de mesure* des épaisseurs. Si l'erreur de mesure reste en général négligeable, l'erreur de situation peut amener certains des effets suivants, dont certains sont catastrophiques :

a) soit une augmentation systématique de la teneur, si du gravier supérieur pauvre a été accidentellement rejeté avec le stérile (il n'est pas question ici du rejet volontaire dans le cadre de la payabilité en profondeur).

b) soit une diminution systématique de la teneur si au contraire du stérile a été accidentellement mélangé au gravier.

c) soit une diminution systématique de la teneur si du gravier inférieur riche a été laissé sur le bed-rock, c'est-à-dire si le puits a été insuffisamment foncé.

d) soit une diminution systématique de la teneur si du bed-rock stérile a été excavé et mélangé au gravier.

Nous écartons a priori l'erreur (*c*), faute grave qu'il appartient aux ingénieurs contrôleurs de faire éliminer par le prospecteur fautif. Les autres erreurs sont pratiquement inévitables, dans une certaine mesure tout au moins ; elles ont d'ailleurs beaucoup moins d'importance pratique, étant donné l'allure de la fonction $l(h)$ — cfr 11.6.

L'erreur (*a*) d'une part, les erreurs (*b*) et (*d*) d'autre part étant variables, et travaillant en sens contraire, peuvent être considérées comme formant dans leur ensemble une erreur systématique évaluable à 5 % (erreur de mesure des hauteurs comprise). Cette erreur figurera donc ici après sous la rubrique $\Delta h/h$.

15.7. — La formule finale de 15.1 donne, toujours par le même procédé de variation logarithmique :

$$\frac{\Delta a}{a} = \frac{\Delta(1 - \beta)}{1 - \beta} + \frac{\Delta q}{q} + \frac{\Delta h}{h} + \frac{\Delta M}{M}$$

d'où l'on tire encore une fois la variance par additivité :

$$v_a = 64 + 144 + 25 + 100 = 333 \text{ \%}^2$$

ce qui donne un σ_a de 18 % environ et une erreur maximum à craindre de 36 %.

15.8. — Cette erreur totale, pratiquement inévitable, quel que soit le soin avec lequel le prospecteur travaille et lave ses 4 ou 8 pans, est donc assez élevée. De ceci, des conclusions pratiques découlent immédiatement :

a) lors du contrôle du prospecteur par son chef, la simple erreur d'environ 20 % sur la détermination du poids de minerai peut entraîner des divergences appréciables entre les données du prospecteur et celles de son contrôleur. Par exemple, pour un puits de 500 g/m², on aura une chance sur 20 de ne trouver que 400 g/m² ou d'atteindre les 600 g/m². Dans les conditions les plus défavorables, il y aurait ainsi 200 g de différence entre les données du prospecteur et celles de son contrôleur.

b) à fortiori, l'erreur totale de 36 % (dont 16 % ne sont pas décelables au contrôle ordinaire par contre-pannage) se traduira, pour le même puits, par des variations de l'ordre de 180 g/m² en plus ou en moins. Il est dès lors illusoire de pousser le calcul de *a* au delà de l'hectogramme ; la feuille d'évaluation portera simplement des renseignements tels que $a_1 = 0,4$; $a_2 = 2,7$ kg/m², etc. Et nous retiendrons la **règle pratique**

lavage de 4 ou 8 pans : accumulation en hectogrammes

L'erreur (ou soi-disant telle) de calcul ainsi introduite est largement inférieure aux erreurs naturelles de mesure. Pousser les calculs numériques au-delà de cette limite de l'hectogramme, c'est perdre son temps, introduire de nouvelles sources de fautes et enlever aux résultats leur aspect naturel et intuitif. Cette précision est d'ailleurs celle des conditions aux limites (rendements, teneurs, etc.).

On notera en terminant que le lavage total est au moins 8 fois plus précis que le lavage partiel.

§ 16. Les erreurs de prospection sur tout le gisement.

16.1. — Malgré les erreurs de prospection, la moyenne de gisement pourra être assez précise. Entendons-nous bien : il ne s'agit ici que de l'accumulation moyenne de tous les puits forés, ou si l'on veut, l'accumulation moyenne du *placer partiel* constitué par les *puits forés* et par absolument rien d'autre. L'erreur générale dont nous parlons ici est donc l'erreur dont sera entâchée cette moyenne par le seul fait de la technique de la prospection. Le problème de la valeur de cette moyenne en tant qu'estimation de la moyenne vraie du *placer total* n'est donc pas effleuré ici.

Ainsi comprise, cette moyenne est précise, \sqrt{N} fois plus précise que la moyenne d'un seul puits, ceci selon la loi classique rappelée en 13.9. Ainsi, pour 100 puits, l'erreur de prospection tombe à quelques pourcents ; pour 400 puits, à l'ordre du pourcent, qui est l'ordre de précision normal de la technique industrielle.

Cette erreur s'ajoutera donc quadratiquement à l'erreur d'échantillonnage dont nous parlerons plus loin. Disons tout de suite que celle-ci sera toujours notablement supérieure à celle-là.

16.2. — Le tonnage et le volume estimés dériveront de l'accumulation moyenne et de la hauteur moyenne estimée (que cette accumulation moyenne soit celle dont nous venons de parler, — la moyenne brute de prospection — ou une autre, pondérée, peu importe) ; et cette dérivation se fera simplement par multiplication par la surface S .

Ainsi, aux erreurs que nous venons de voir s'ajoutera **l'erreur de surfaçage**, ou plutôt de surface. Cette erreur peut largement dépasser le pourcent ; elle provient des erreurs de levé (axes et recoupes, tracés de base), des erreurs de pente et de délimitation des flats, des erreurs (ou des fantaisies) du dessinateur, des erreurs

de déformation du papier (considérable en climat humide), du fonctionnement du planimètre.

D'ailleurs, tant qu'une théorie correcte de la délimitation *précise* des placers n'aura pas été édifiée, le calcul ou la mesure des surfaces des placers resteront des opérations de précision illusoire. A quoi bon mesurer avec une haute précision une surface dont le tracé même est livré à l'arbitraire de l'évaluant, et l'excavement à l'arbitraire de l'exploitant ?

Dans l'état actuel de la question, le calcul expéditif suivant pourra remplacer avec suffisamment de précision les longs planimétrages : prendre une maille « pratique » valant 90 % de la maille théorique du terrain pour tous les puits intérieurs, et 60 % pour les puits frontières (données d'expérience tenant compte de la diminution de surface des mailles due à la courbure des placers, à l'imprécision des teneurs-limites, aux accidents de terrain) ; enfin corriger de la pente, surtout pour les gisements éluvionnaires.

16.3. — En résumé, il ne faut pas espérer obtenir le tonnage et le volume avec une précision de moins de quelques pourcents, et ceci sans même tenir compte des erreurs d'échantillonnage dont nous allons parler. Dès lors, on peut indiquer la **règle pratique** ci-après :

volume et tonnage : 2 chiffres significatifs

(ces grandeurs varient le long d'une gamme trop étendue et l'on ne peut indiquer une règle basée sur une unité fixe, ainsi que cela avait été fait dans les deux § précédents).

L'exemple du tableau 8.1 n'a été donné sous cette forme que pour illustrer la vérification des calculs-types. En réalité, il peut se contenter des indications suivantes :

$$Q = 210 \text{ tonnes} ; V_{gr} = 76.000 \text{ m}^3 ; V_{ex} = 123.000 \text{ m}^3 ; \\ S = 88.000 \text{ m}^2.$$

DEUXIÈME PARTIE

LE PROBLÈME DE L'ÉVALUATION ET SA SOLUTION

§ 17. Sommaire.

17.0. — Lorsque l'évaluant a reçu les données du prospectant, un problème de statistique mathématique se pose à lui : Estimer les paramètres d'une population inconnue à partir de ceux d'une population d'échantillonnage.

Simultanément, se dresse un problème économique : Partager le gisement en un placer payant et un placer complémentaire de façon à assurer à l'exploitant le maximum de bénéfices.

Si ce dernier problème peut être maintenant considéré comme définitivement résolu — en théorie, tout au moins — il n'en va encore guère de même pour le premier. Tous les évaluateurs sont victimes de la « psychose de la surévaluation » : Mon Dieu, ma moyenne n'est-elle pas trop forte ? Car la surévaluation discrédite l'évaluant et conduit l'exploitant aux catastrophes financières. Et de là est née cette idée, si souvent exprimée, que *toutes* les moyennes brutes de prospection sont surévaluées !

Le statisticien ne peut s'attarder un seul instant à

une hypothèse tellement fautive par sa généralité même. Mais il doit cependant reconnaître qu'il se passe malgré tout quelque chose de spécial, et s'y arrêter : Il y a des « *puits exceptionnels* » ; il y a des « *anomalies marginales* » ; il y a des « *dissymétries de moyennes* ». Et il doit proposer des remèdes.

Nous passerons donc en revue la plupart des remèdes adoptés ou proposés par certains, et nous en ferons la critique. Puis, nous en suggérerons un autre à notre tour ; il est tout classique dans son idée : l'emploi des *distributions de PEARSON* ; il est peut-être original dans son application : la pratique des « *graphiques gamma* », traductions sur diagrammes semi-logarithmiques des intégrales des fonctions III de K. PEARSON, ou « *fonctions Γ incomplètes* ». L'emploi des tables de Pearson, s'il est assez universel, ne s'avère cependant guère praticable en brousse, où l'on ne peut même pas raisonnablement demander aux ingénieurs ou aux prospecteurs de calculer de simples écarts quadratiques ; la méthode des graphiques gamma échappe à cet inconvénient, et c'est pour cela que nous la préconisons (elle permettrait même de supprimer le calcul des moyennes, si on le désirait!).

Une des fonctions de PEARSON joue un rôle privilégié, c'est la distribution exponentielle. Nous avons appelé *gisement parfait* un gisement où les accumulations se distribuent selon une loi exponentielle ; comme alors les surfaces des placers y décroissent en progression géométrique lorsque l'accumulation-limite croît en progression arithmétique, ces gisements se prêtent à des *réévaluations* instantanées et de haute précision, lorsque les conditions économiques viennent à se modifier après une première évaluation. De toute façon, les tables de PEARSON permettent de dresser des tables de réévaluation applicables à tous les gisements non parfaits.

On trouvera *in fine*, quelques exemples d'application de la méthode d'évaluation par les graphiques gamma :

calcul des moyennes et des écarts quadratiques des moyennes, réduction des puits exceptionnels, critique de la maille choisie, supputation des risques à courir par l'exploitant, etc...

CHAPITRE IV

APERÇU GÉNÉRAL DU PROBLÈME DE L'ÉVALUATION

§ 18. Sommaire.

18.0. — Le problème principal qui se pose à l'évaluant relève de la statistique mathématique, et, comme tel, rentre dans le cadre général des problèmes d'échantillonnage :

« Une population-mère inconnue (gisement) est composée d'individus (puits jointifs possibles) caractérisés chacun par un groupe de variables aléatoires (hauteurs, accumulations, ...); déterminer les meilleures valeurs possibles des paramètres caractéristiques (moyenne, écart quadratique, ...) de la dispersion de ces variables, ce à partir d'un échantillonnage (prospection) portant sur un nombre N relativement restreint d'individus (prélèvements, puits effectivement creusés) extraits de la population-mère (gisement ou placers) ».

Ainsi que nous l'avons déjà signalé, le problème déborde de ce cadre dès que l'on aborde la question de la délimitation des placers — c'est-à-dire de l'amputation de la population. Si on envisage en outre le problème

des délimitations variables — c'est-à-dire des réévaluations — on entre dans le difficile domaine, à peine exploré, de la *statistique des systèmes ouverts*, opposée à la statistique habituelle des systèmes fermés, des populations fixes, fermées, définies.

La détermination des paramètres se heurte à de graves difficultés : a) la moyenne est faussée par les puits aberrants, et aussi, souvent, par le procédé même de délimitation ;

b) l'écart quadratique de la moyenne d'échantillonnage est faussé par les mêmes puits aberrants, et aussi par une dépendance mutuelle des éléments de l'échantillonnage (puits), dépendance qui ne se manifeste pas toujours, mais qui peut être une conséquence de l'existence des « runs ».

La première difficulté sera levée dès qu'on aura trouvé la loi la plus vraisemblable de distribution, loi qui remplacera celle de GAUSS, devenue caduque ici, et donnera en même temps des critères d'exceptionnalité. Il ne faudra pas perdre de vue non plus, cependant, le curieux effet de surévaluation marginale mis en lumière par les travaux de DEMELENNE.

Quant à la seconde difficulté, elle sera résolue lorsque l'on tiendra compte des effets de groupement en substituant, dans les calculs des variances de moyennes, au nombre réel de puits creusés, le « nombre de puits utiles », presque toujours inférieur au nombre réel de puits. Cette substitution est en rapport avec la perte de degrés de liberté que subit le système de puits du fait des liaisons de teneurs réalisées par les runs.

Une analyse plus détaillée de la variance pourra même donner des renseignements sur la rentabilité d'une dimension de maille choisie pour le réseau de prospection.

§ 19. La population des puits et son échantillonnage.

19.1. — La **population-mère** est celle de *tous les puits jointifs possibles*. Elle peut être considérée soit comme continue (puits élémentaires de gabarit infiniment petit ds) soit comme discontinue (puits normaux de gabarit s fini). Le second point de vue soutient évidemment mieux l'intuition, tandis que le premier se prête mieux aux développements analytiques.

Les deux points de vue sont équivalents en pratique parce que le gabarit s des puits ordinaires est toujours considérablement plus petit que la surface de la maille (de 10^{-2} à 10^{-3}). L'échantillonnage ne perturbe en rien la population-mère, et la quantité de minerai enlevée par le prospecteur est négligeable vis-à-vis du tonnage total (inférieure aux erreurs d'évaluation).

Puisque chaque puits est caractérisé par deux variables aléatoires au moins, la *hauteur* et l'*accumulation*, la population est *bi-* ou *multi-variée*, comme on dit. Dans les cas de payabilité simple, l'*accumulation-limite* n'est pas une variable supplémentaire, mais une combinaison linéaire des précédentes. Quant à la *teneur*, c'est simplement le rapport des deux variables fondamentales, et sa distribution peut s'étudier, si on le désire, à partir de celles des variables fondamentales ; nous n'aurons pas à le faire ici dans le cadre du présent travail.

19.2. — Toute population est caractérisée, dans son ensemble par des PARAMÈTRES STATISTIQUES, parmi lesquels la moyenne et l'écart quadratique sont les plus banals. Nous allons en énumérer les principaux, en rappelant que ces paramètres sont à considérer pour chacune des variables aléatoires.

Parmi les **paramètres de position**, citons :

- a) la *moyenne arithmétique* ;
- b) le *mode* (ou les modes), valeur dont la probabilité d'arrivée est maximum ;

c) la *médiane*, valeur qui a une chance sur deux d'être passée ;

d) la *moyenne géométrique*, qui peut jouer un rôle de premier plan dans certains problèmes ; il y a des gisements où la distribution des $\log a$ est plus régulière que celles des a eux-mêmes. Rappelons que le logarithme de la moyenne géométrique est égal à la moyenne arithmétique des logarithmes.

Il y a aussi les **paramètres de dispersion**, tels que

a) la *variance* et l'*écart quadratique* ;

b) les *écarts médians* inférieur et supérieur, qui ont 25 % de chances d'être passée en — ou en +, à partir d'une valeur de référence qui est en général la médiane. Dans la suite, nous les considérerons comme pris par rapport à la moyenne, en faisant remarquer qu'alors l'un des deux écarts peut ne pas être définissable : si la distribution est très dissymétrique et si l'accumulation moyenne n'a par exemple que 20 % de chances d'être passée en —, l'écart médian inférieur n'existe évidemment pas.

c) les *moments*, famille vaste et importante dont nous avons déjà parlé (13.5). La connaissance précise des moments revient à celle de la distribution elle-même ; mais en prospection, cette précision est illusoire, et le calcul des moments supérieurs ne nous sera jamais que de faible utilité.

Si la distribution est symétrique, comme c'est le cas de la distribution gaussienne, la moyenne, la médiane et le mode coïncident ; tel ne sera que très rarement le cas en prospection. Cette symétrie entraîne aussi l'égalité des écarts médians inférieur et supérieur, et on donne le nom d'*écart probable* à leur valeur (absolue) commune.

19.3. — Il faut soigneusement distinguer les *paramètres vrais* de la population-mère des *paramètres d'échan-*

tillonnage, qui caractérisent ici la population des puits de prospection. Ceux-ci ne sont évidemment que de plus ou moins bonnes estimations de ceux-là. La statistique mathématique permet dans certains cas de déterminer le degré de précision de ces estimations. Pour être représentatifs, les paramètres d'échantillonnage doivent notamment être *efficaces* et *consistants*.

19.4. — On dit qu'un paramètre est *efficace* lorsque ses estimations par échantillonnage se dispersent faiblement et régulièrement autour de la valeur vraie du paramètre. Dans beaucoup de problèmes, la moyenne arithmétique est un paramètre particulièrement efficace ; les moments d'ordre supérieur le sont toujours beaucoup moins.

L'efficacité de la moyenne est assurée par le théorème de Laplace (13.14) qui affirme simplement que si le nombre des prélèvements tend vers l'infini, les moyennes d'échantillonnage tendent à se distribuer de plus en plus efficacement. L'existence même de cette tendance est indépendante des caractéristiques de la population-mère, mais il n'en va pas de même en ce qui regarde la *rapidité* d'action de cette tendance. Selon le degré de dissymétrie de la population-mère, il faudra dans certains cas 2 ou 3 fois plus de puits que dans d'autres pour arriver à la même efficacité de la moyenne.

Le problème de la dimension de la maille des réseaux de prospection est donc en relation étroite avec celui de l'efficacité de la moyenne.

19.5. — Un paramètre est certainement efficace lorsque ses estimations se distribuent selon la loi normale de GAUSS. Mais cette loi n'est admissible, en toute rigueur, que pour des variables aléatoires pouvant se disperser de $-\infty$ à $+\infty$; or, cette condition n'est justement pas réalisée pour les variables de prospection, qui sont des nombres essentiellement positifs.

Il est toutefois bien connu que si une variable aléatoire z se distribue normalement autour de sa vraie valeur Z , l'immense majorité de ses valeurs se groupe dans le domaine $Z \pm 3\sigma$. Si donc z est une variable qui ne peut prendre que des valeurs *positives*, on peut déjà dire que si $\sigma > Z/3$ la distribution gaussienne est impossible et les estimations \bar{z} de Z risquent de ne pas être très efficaces. Vice-versa, la condition $\sigma < Z/3$ est nécessaire (mais non suffisante) à l'efficacité de la moyenne.

Ainsi donc, si on trouve qu'une moyenne de prospection \bar{z} présente un écart quadratique supérieur à $\bar{z}/3$, on peut commencer à douter du caractère représentatif de la prospection et à craindre qu'une augmentation du nombre de puits (resserrement de la maille) ne soit nécessaire. Nous reprendrons cette question avec plus de détails dans le prochain chapitre.

19.6. — Un paramètre est dit *consistant* lorsque ses estimations d'échantillonnage se distribuent autour de sa vraie valeur ; il est non-consistant ou *biaisé* dans le cas contraire.

Nous avons déjà rencontré un exemple de paramètre biaisé (13.6). Nous verrons plus loin que la moyenne de prospection court *toujours* des risques de biais, notamment à cause des surévaluations marginales.

19.7. — Un échantillonnage doit être *simple* et *fortuit*. Soit $f(z_1)$ la (densité de) probabilité d'arrivée de la valeur z_1 d'une variable aléatoire z . L'échantillonnage ⁽¹⁾ se compose de N puits et il peut sembler évident à première vue que, d'après le théorème des probabilités composées, la probabilité d'arrivée de l'échantillonnage soit le produit des probabilités d'arrivée des échantillons

$$f(z_1) \cdot f(z_2) \cdot \dots \cdot f(z_N)$$

(1) Nous réservons le mot *échantillon* pour désigner le prélèvement individuel, le puits. Le mot *échantillonnage* désigne alors l'ensemble des échantillons, c.-à d. tout le réseau, toute la prospection.

Si tel est le cas, l'échantillon sera dit simple et fortuit. Mais tel n'est pas toujours le cas, particulièrement en prospection :

a) l'échantillon ne sera pas **fortuit** si les probabilités d'arrivées sont modifiées par l'opération même d'échantillonnage. Cela arrivera par exemple si l'on oublie de creuser des puits dans le versant, à la limite même d'un flat d'alluvions ; du coup, on peut trouver, pour les puits payants, une probabilité $g(z_i)$ *systématiquement* différente (et non seulement accidentellement) de la probabilité vraie $f(z_i)$.

b) l'échantillonnage ne sera pas **simple** si la probabilité n'est pas le produit des probabilités simples, tel qu'indiqué ci-dessus, mais une fonction plus complexe des z_i :

$$F(z_1, z_2, \dots, z_n).$$

Cela arrivera inmanquablement si les z_i ne sont pas indépendants, car alors justement le théorème des probabilités composées ne s'applique plus. Ainsi, un réseau qui ne serait pas assez serré dans le sens transversal pourra accidentellement laisser échapper tout un run à la prospection ; mais par contre, s'il fait apparaître un seul puits du run, il fait apparaître aussi le run tout entier. L'« événement », au sens habituel des manuels de calcul des probabilités, est ici le « run », et non le « puits ». Au sein du run, les puits apparaissent comme liés, comme dépendants, et le théorème des probabilités composées ne s'applique plus aux puits individuels. Dans un pareil cas, l'échantillonnage n'est pas simple, par définition même, et les considérations classiques du § 13 ne doivent plus être acceptées qu'avec précaution.

19.8. — Lorsque l'on a des doutes sur la simplicité de l'échantillon, le remède tout indiqué semble être le resserrement du réseau de puits de prospection. Mais au lieu

d'adopter cette solution coûteuse, on peut simplement essayer d'évaluer d'une manière plus adéquate l'erreur à craindre après l'évaluation de la moyenne. Nous le ferons en introduisant les notions de *coefficient de dispersion* et de *nombre utile de puits*. Avant d'aller plus loin, disons tout de suite que ces considérations n'auront à s'appliquer qu'aux accumulations, l'évaluation de la hauteur moyenne ne présentant guère en général de pareilles difficultés.

Soit V la variance vraie de gisement ; $V_{\bar{a}}$, la variance des moyennes de prospection, variance calculée sur tous les réseaux de N puits semblables au réseau réellement foré. Le n° 13.9 se généralise sans difficulté au cas où les variables ne sont plus indépendantes, et un calcul très simple montre que

$$V_{\bar{a}} = \frac{V}{N} + \frac{\sum_{i \neq j} \sum C_{ij}}{N^2}$$

où les C_{ij} sont les *covariances*, telles que définies en 13.10. Cette formule suppose que tous les puits ont été numérotés de façon similaire dans chaque réseau, bien entendu.

Les C_{ij} sont en nombre $N \cdot (N - 1)$ et leur moyenne sera

$$\bar{C} = \frac{\sum_{i \neq j} \sum C_{ij}}{N(N - 1)} = V_{\bar{a}} \cdot \frac{N}{N - 1} - \frac{V}{N - 1}.$$

On appelle d'autre part *coefficients de corrélation* les rapports

$$\rho_{ij} = \frac{C_{ij}}{V}$$

ce sont des grandeurs qui ne peuvent varier que de -1 à $+1$. Le *coefficient moyen de corrélation* sera de même

$$\bar{\rho} = \frac{\bar{C}}{V}$$

Comme V et $V_{\bar{a}}$ sont des grandeurs essentiellement positives et que d'autre part $\rho \leq +1$, on peut voir que

$$N \cdot (N - 1)V \geq \sum_{i \neq j} C_{ij} = -N \cdot V$$

d'où

$$1 \geq \bar{\rho} \geq -\frac{1}{N-1}$$

ce qui donne les limites de variations du coefficient moyen de corrélation.

On a d'autre part, d'après la formule de départ :

$$V_{\bar{a}} = \frac{V}{N} \left[1 + (N-1) \cdot \bar{\rho} \right] \equiv \gamma^2 \frac{V}{N} \equiv \frac{V}{N_u}$$

Nous avons ainsi introduit deux nouvelles notations, et deux nouvelles notions, celle du *coefficient γ de dispersion des moyennes* et celle du *nombre utile N_u de puits*. On voit que

$$N \geq \gamma^2 \geq 0$$

les limites supérieure et inférieure correspondent respectivement à celles de $\bar{\rho}$.

Le cas $\gamma^2 = 0$ correspond à l'éventualité toute théorique où toutes les moyennes de réseau seraient égales, car alors $V_{\bar{a}} = 0$. Le cas $\gamma^2 = N$ est tout aussi schématique ; c'est celui où tous les puits auraient rigoureusement la même teneur, car alors $V_{\bar{a}} = V$.

Le cas idéal $\gamma^2 = 1$, c'est-à-dire $\bar{\rho} = 0$, est celui où l'échantillonnage est parfaitement *simple* ; il restitue la formule classique du n° 13.9

$$V_{\bar{a}} = \frac{V}{N}$$

Dans la pratique, bien entendu, on prendra pour V non pas la valeur vraie inconnue, mais la variance de prospection, et l'on aura

$$V_{\bar{a}} = \frac{V'}{N} = \frac{\Sigma \epsilon^2}{N_u(N-1)}$$

19.9. — La réalité se situera entre les cas extrêmes que nous venons d'envisager. Nous considérerons deux éventualités :

a) ou bien $1 > \gamma^2 > 0$, d'où $N_u > N$; c'est le *gisement économique* : un réseau de N puits y donne la même précision qu'un échantillonnage simple virtuel qui comprendrait un nombre de puits N_u plus grand que le nombre employé N ;

b) ou bien $N > \gamma^2 > 1$, d'où $N > N_u$; c'est le *gisement dispendieux* : un réseau de N puits $n'y$ donne qu'une précision plus faible que celle fournie par un échantillonnage simple virtuel de N prélèvements. Autrement dit, des N puits creusés, il n'y en a que N_u qui soient « utiles ».

On peut démontrer que ce dernier cas est justement celui envisagé en 19.7. *b*, celui où le réseau n'est pas assez serré. En pareil cas, une légère augmentation du nombre des puits réels paie doublement, si l'on peut dire. On peut démontrer aussi que le cas (*a*) ci-dessus est celui où la zone entourant chaque puits serait tellement homogène qu'une légère translation du réseau ne modifierait qu'insensiblement la moyenne. En pareil cas, l'augmentation du nombre des puits ne paie pas, façon de parler.

Il existe donc une maille optimum pour chaque gisement, mais il est pratiquement quasi-impossible de la déterminer, faute d'expériences suffisamment nombreuses de prospections jointives. Dans la pratique, on considérera donc a priori tout gisement inconnu plutôt comme dispendieux, et on le dotera d'un coefficient de dispersion dont le carré sera pris en général de l'ordre de 1 ou 2, plutôt 1 que 2, sauf dans le cas de gisements vraiment chaotiques, où il sera prudent d'aller jusque 2,5 ou 3 tout au plus. On verra alors si l'écart quadratique ainsi attribué à la moyenne, γ fois plus grand que l'écart théorique, ne fait pas courir le risque d'une surévaluation catastrophique. Dans ce cas — mais dans ce cas seule-

ment — on envisagera de creuser des puits supplémentaires. La théorie précédente donne donc finalement un critère permettant de décider en connaissance de cause s'il y a lieu ou non, dans un cas donné, de resserrer le réseau.

19.10. — Une dernière remarque : A côté du nombre de puits utiles, on peut introduire le nombre P

$$P \equiv N - N_u$$

de puits *perdus*. Moyennant quoi, la dernière formule 19.8 peut s'écrire :

$$V'_a \cong \frac{\Sigma \epsilon^2}{N(N - P)}$$

Ce qu'on peut interpréter en disant que les liaisons d'échantillonnage ont fait perdre P degrés de liberté (si l'échantillon est dispendieux, sinon il y a gain).

§ 20. Les distributions.

20.1. — La loi de GAUSS n'est qu'un exemple entre mille de loi de distribution ; les développements de la statistique pratique ont montré que si cette loi joue un rôle théorique important, un peu comparable à celui de la droite en géométrie, on ne la rencontre guère dans les problèmes réels autres que le tirage des urnes infinies ou la dispersion des erreurs. Ce sont notamment la biologie et la psychologie expérimentale qui ont conduit les statisticiens vers des lois plus générales, moins régulières que celle de GAUSS.

Avant de songer à représenter mathématiquement une dispersion quelconque, on peut toujours songer à en dresser l'histogramme et la ligne des fréquences, ainsi que nous l'avons indiqué pour la courbe de GAUSS (13.11 et 13.12).

Portons en abscisse les valeurs de z et en ordonnée

leur nombre d'arrivées ; nous obtenons l'*histogramme* ou ligne de dispersion. Dans les cas pratiques c'est une ligne polygonale à paliers où se devinent un ou plusieurs modes ; dans les cas théoriques, mathématiques, c'est évidemment une courbe continue ou discontinue.

Portons en ordonnée la somme des nombres d'arrivées des valeurs égales ou plus faibles que la valeur z considérée ; nous obtenons la *ligne des fréquences*. C'est une ligne polygonale à paliers, monotone (non décroissante) montant de O à N. Lorsque la distribution est une fonction continue unimodale, la ligne des fréquences est une courbe en S dont le point d'inflexion marque le mode.

Si nous portons au contraire en ordonnée la somme des nombres d'arrivées des valeurs plus fortes que la valeur z considérée, nous obtenons la *ligne des fréquences décroissantes*. C'est également une ligne monotone, une fonction non croissante, ici, et descendant de N à O. C'est à cette seconde ligne que nous aurons recours de préférence par la suite.

L'histogramme et la ligne des fréquences sont dits *normés* lorsque les nombres d'arrivées sont divisés par N, nombre total d'arrivées. Les ordonnées sont alors des *fréquences* ; la ligne normée des fréquences croît de 0 à 1, tandis que l'histogramme normé délimite, avec l'axe des abscisses, une surface égale à 1.

20.2. — Il est intéressant parfois de substituer à ces lignes polygonales des courbes continues qui les « ajustent ». Ce procédé a l'avantage d'ouvrir la porte aux considérations analytiques et de permettre la définition d'une dispersion au moyen d'un nombre minimum de paramètres.

Il existe plusieurs procédés mathématiques classiques permettant ces ajustements avec toute la précision désirable. Nous nous contenterons, dans le présent travail, d'un ajustement graphique, moins précis, mais plus

intuitif et plus pratique, et par ailleurs bien suffisant, étant donnée la piètre précision des prospections et des évaluations.

Ces procédés d'ajustement substituent à l'histogramme et à la ligne de fréquence respectivement la *courbe de dispersion* et la *courbe des fréquences* (ajustées).

Au premier coup d'œil jeté sur une population d'accumulations, on est tout de suite frappé par la forte dissymétrie des lignes ou courbes de dispersion et de fréquence : le mode, la médiane et la moyenne se séparent nettement (et se présentent, pour les accumulations croissantes, dans l'ordre indiqué, contraire de l'ordre alphabétique des mots anglais *mode, medium, mean.*).

20.3. — Certains gisements présentent des dispersions à deux ou plusieurs modes ; ces cas résultent de la superposition de deux ou plusieurs types de distributions unimodales dues à des causes bien distinctes et en principe dissociables : apports d'un affluent, variations dans la granulométrie, etc.

Dans beaucoup de cas, le second mode est faible et peut être considéré comme une fluctuation locale (ceci est surtout vrai pour les distributions de cassitérite, qui est le seul minerai dont nous nous occupons ici). Les distributions plurimodales sont toujours malaisées à analyser ; les développements qui suivent ici ne s'appliquent pas à ces cas, relativement peu importants.

Des auteurs ont cependant proposé des méthodes d'évaluation basées sur le caractère plurimodal soi-disant général et nécessaire des distributions de minerai, et ils les ont appliquées même lorsqu'il n'y avait pas la moindre trace d'un second mode sur les lignes de fréquences. Il ne peut s'agir là que de procédés purement empiriques, ne pouvant rendre des services que dans de rares cas isolés.

20.4. — Aux modes (maxima) des courbes de dispersion correspondent donc les points d'inflexion des courbes de fréquences. Dans les problèmes pratiques, traités par les méthodes graphiques, les points d'inflexion sont toujours plus faciles à localiser que les maxima, ceci d'autant plus qu'un histogramme discontinu présente souvent de faux modes.

C'est d'ailleurs une remarque générale que les lignes de fréquence, étant des intégrales des données primaires, se prêtent beaucoup mieux à l'étude que ces données elles-mêmes (constitutives de l'histogramme).

20.5. — Une autre caractéristique, très gênante, des distributions de prospection, c'est l'existence, souvent constatée, de *puits exceptionnels*, c'est-à-dire de puits qui par leur fréquence anormale, sont aberrants, étrangers à la distribution générale. Peuvent être considérés comme tels des puits donnant lieu à de petits modes secondaires ; mais le vocabulaire courant de la prospection emploie cette expression surtout pour désigner les puits d'accumulation à la fois rare et haute.

Les puits exceptionnels tantôt caractérisent une petite vallée sèche, tantôt trahissent une variation subite de la granulométrie, tantôt résultent d'une importante irrégularité locale de l'ancien cours de la rivière ; en un mot, ils proviennent toujours d'une variation *locale et importante* des causes de la minéralisation.

Ces puits doivent être exclus des distributions ; ils faussent complètement le calcul des moments, et déjà celui de la moyenne. Le seul moyen rationnel de traiter ces cas consiste à creuser un ou deux puits de contrôle à côté du puits exceptionnel. Pour éviter de recourir à ce moyen un peu coûteux, beaucoup de prospecteurs emploient des procédés de *réduction* des teneurs exceptionnelles. Ces procédés, dont nous parlerons plus loin, sont tous empiriques, mais rendent des services en écartant systématiquement le danger de surévaluation.

20.6. — Il est par ailleurs difficile de répondre à la question : « A partir de quel seuil une accumulation est-elle exceptionnelle ? » ou encore : « Quand peut-on dire qu'une fréquence est anormale ? » Tous les prospecteurs appliquent des critères divers d'exceptionnalité, mais dont aucun ne peut prétendre à l'universalité.

Et nous touchons ainsi du doigt le nœud même du problème de l'évaluation : En théorie ordinaire des erreurs, il est toujours possible de constater que telle ou telle mesure est aberrante parce que l'on connaît la loi de distribution des erreurs (loi de GAUSS), loi toute théorique, mais reposant sur des postulats extrêmement vraisemblables et sanctionnés chaque jour par la pratique, avec une approximation suffisante. En théorie des évaluations de prospection, comme on n'a aucune idée de la loi théorique de distribution, la question des puits exceptionnels risque de rester sans réponse ; et même de conduire à un cycle vicieux : Pour décider de l'exceptionnalité, il faut connaître la loi de dispersion ; mais pour arriver à connaître cette loi, il faut tenir compte de tous les puits, ou tout au moins du plus grand nombre d'entre eux ; or, parmi ceux-ci se trouveront certainement des puits effectivement aberrants mais qu'on ne peut justement pas identifier comme tels, faute de loi connue.

On peut évidemment échapper à ce cercle vicieux en procédant par approximations successives : rechercher, par une méthode appropriée la loi mathématique de dispersion ; éliminer les puits que cette loi indiquera comme exceptionnels ; calculer alors une nouvelle courbe ajustant la dispersion, mais ne tenant compte que des puits restants ; et ainsi de suite. C'est un procédé très long, et peu praticable pour un ingénieur travaillant sur le terrain.

On peut aussi faire une hypothèse à priori sur la nature même de la loi cherchée, hypothèse basée sur des considérations théoriques plausibles, et attendre de l'expé-

rience la confirmation de cette loi. Autrement dit, généraliser la loi de GAUSS dans un sens convenant aux problèmes d'évaluation. Nous indiquerons au chapitre suivant dans quel sens nous proposons cette généralisation.

20.7. — La plupart des courbes de dispersion de prospection se présentent sous l'une des formes suivantes :

- soit la « cloche » plus ou moins symétrique
 - soit le « J » renversé, l'arc d'allure hyperbolique
- } fig. 20.7

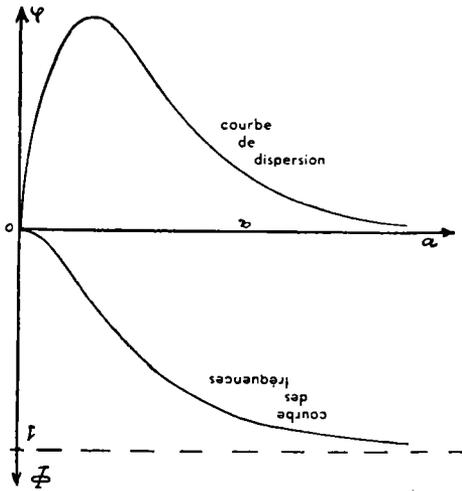


FIG. 20.7.a

La dissymétrie de ces courbes est toujours telle qu'à chances égales l'écart en trop est plus grand en module que l'écart en trop peu. Si la dissymétrie est très forte et si le nombre des puits n'est pas très élevé, la distribution des moyennes risque aussi de présenter une dissymétrie dans le même sens : on a alors des chances aussi égales d'assister à une forte surévaluation qu'à une faible sous-évaluation.

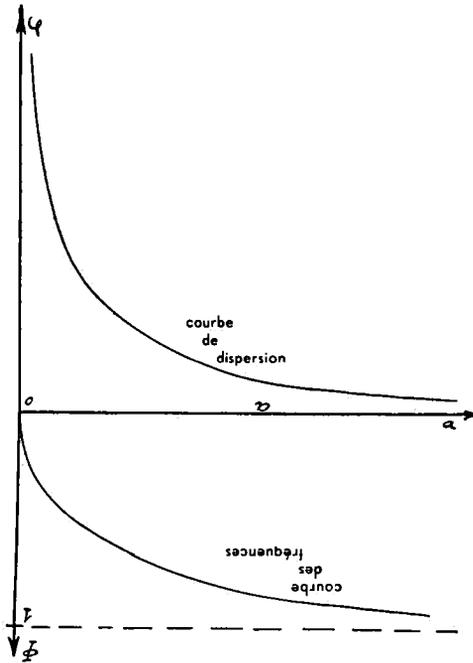


FIG. 20.7.b

20.8. — Comme nous l'avons déjà signalé, les hauteurs se distribuent d'une façon beaucoup plus régulière que les accumulations, et c'est surtout à ces dernières que s'appliquent les considérations de ce § 20.

Les hauteurs vraiment exceptionnelles sont plutôt rares dans une distribution donnée. L'allure générale de cette dernière est celle d'une cloche faiblement dissymétrique, mais cette dissymétrie peut devenir plus importante pour les graviers de faible épaisseur. On peut donc dire qu'en première approximation — approximation bien suffisante dans la plupart des cas — les hauteurs se distribuent selon la loi normale des erreurs ou loi de GAUSS.

20.9. — Deux variables aléatoires sont dites en **corrélacion** lorsque la distribution de l'une d'elles dépend de la valeur prise momentanément par l'autre variable.

Au § 19, nous avons rencontré un premier cas de corrélation, mais il s'agissait alors de corrélation *intraclasse*, comme on dit, de corrélation entre les accumulations d'un même réseau, ou de réseaux voisins. Nous envisageons maintenant ici le cas de corrélations plus générales, *extraclasses*, entre variables quelconques.

Ainsi, la distribution de la wolframite (lorsque ce minéral est présent) est en corrélation avec celle de la cassitérite, et l'on trouvera des exemples de calculs de pareilles corrélations dans la plupart des manuels traitant de la minéralisation. L'accumulation en gisement alluvionnaire est en corrélation plus ou moins forte avec le n^o du puits sur sa ligne ; l'accumulation d'un puits est en corrélation avec la hauteur du gravier dans ce puits.

20.10. — Les puits profonds ont tendance à être plus riches que les puits peu profonds, mais cette tendance n'est pas très marquée pour les puits d'accumulation assez voisine. Cette remarque permet une simplification dans le calcul des hauteurs moyennes : la hauteur moyenne de tout un gisement est pratiquement la même que celle de ses placers payants.

Le calcul de la hauteur totale des forages incombe au prospecteur, car cette hauteur est une mesure de son travail et de son rendement. On peut aussi exiger de lui les calculs séparés des hauteurs totales de recouvrement, de gravier et de bed-rock forés, car cela donnera une mesure encore plus précise de son rendement. Dès lors, ce calcul sera épargné à l'ingénieur, qui en déduira sans peine la hauteur moyenne (ou les hauteurs moyennes) qui l'intéresse. Il ne commettra en général que de faibles erreurs en assimilant ces hauteurs moyennes de gisement à celles, inconnues, des placers. Il s'épargnera ainsi encore d'autres calculs inutiles.

Le problème des hauteurs moyennes est très simple et ne présente aucune difficulté ; il est pratiquement indé-

pendant de celui de la payabilité et de la délimitation des placers. En conséquence, lors d'une réévaluation qui serait imposée par un changement imprévu des conditions économiques, il est absolument inutile de recalculer les hauteurs moyennes des couches.

§ 21. La payabilité et la délimitation des placers.

21.1. — Le but de la prospection n'est pas seulement de rechercher les estimations les meilleures, mais aussi de sélectionner, dans les distributions obtenues, les puits payants, ce afin de délimiter des placers exploitables avec bénéfice.

Comme nous l'avons vu, l'*accumulation-limite* est, dans les cas simples de payabilité, une combinaison linéaire des hauteurs des couches. Elle est donc elle-même une variable aléatoire, mais dont la dispersion sera gaussienne si les hauteurs se dispersent gaussiennement (13.13). Le cas vraiment simple de la payabilité est celui où l'*accumulation-limite* se dispersera tellement peu qu'on pourra partout la remplacer par sa moyenne.

Dans ce qui suit, la théorie de la payabilité ne jouera aucun rôle. La nature de celle-ci est laissée dans l'ombre ; on admet simplement que par un procédé quelconque on a pu sans ambiguïté partager les puits en *payants* et *non payants*.

21.2. — La délimitation des zones payantes présente une première difficulté qui saute aux yeux : la prospection nous donne uniquement les accumulations sous de petites surfaces s_0 , gabarits des puits disséminés sur le terrain. Que se passe-t-il dans l'entourage de ces petites surfaces, de ces puits ? Si un puits est payant, jusqu'où s'étend autour de lui la zone qu'il est légitime de supposer payante ?

C'est ici que s'introduit tout naturellement la notion de *surface d'influence* et l'*hypothèse des aires d'influence*

(6.5). Cette hypothèse semble fournir un procédé facile de délimitation des placers payants : leur frontière passe tout naturellement entre les surfaces d'influence payantes et non payantes, c'est-à-dire à mi-chemin entre les derniers puits payants et les premiers puits non-payants.

Or, cette manière de voir et de procéder est totalement fallacieuse, comme on va le voir.

21.3. — Nous allons d'abord introduire une nouvelle définition de la surface d'influence, originale à notre connaissance, et qui semble bien adaptée au problème. Nous nous bornerons toutefois à la seule distinction entre puits payants et non payants, bien que cette définition puisse se généraliser sans difficulté à tous les puits, partagés en deux classes quelconques. Pour éviter toute confusion, nous emploierons de préférence le mot **domaine** :

« Le domaine payant (non payant) d'un puits effectif payant (non payant) est le plus grand cercle possible, centré sur ce puits, et où la fréquence des puits possibles non payants (payants) est nulle ou négligeable ».

Le mot « effectif » veut dire ici « effectivement creusé » ; cette distinction entre puits effectif et puits possible est ici purement méthodologique, et ne joue pas de rôle spécial.

L'étendue du domaine, pour un puits donné, ou, si l'on veut, la mesure du rayon r de ce domaine circulaire dépend donc de deux facteurs :

a) la façon dont les accumulations sont groupées sur le terrain environnant le puits ;

b) le sens que l'on voudra donner au mot « négligeable » ; on précisera mathématiquement la chose en se fixant une limite supérieure ϵ que la fréquence des puits possibles non payants (payants) ne pourra pas dépasser.

r sera donc une fonction de point définie sur tout le gisement, et une fonction de ϵ fixé arbitrairement. r est

donc littéralement une *fonction de groupement*, fonction d'un genre qui nous faisait totalement défaut jusqu'ici.

21.4. — Si les accumulations étaient dispersées et mélangées parfaitement au hasard sur le terrain, r serait partout rigoureusement nul, ou plutôt « presque partout », c'est-à-dire partout sauf en des endroits isolés où par le jeu normal des fluctuations, les puits possibles payants (non payants) seraient venus à se grouper ou à se raréfier anormalement.

En pareil cas, l'élimination d'une quelconque maille dite ou supposée non payante amènerait une perte de réserves, car cette maille serait fatalement sous-évaluée. Et la suppression des puits non payants effectifs, lors du calcul de l'accumulation moyenne de prospection, amènerait fatalement une surévaluation des zones restantes, dites ou supposées payantes. La démonstration de ces propositions se conduit assez aisément.

Supposons connue la population-mère du gisement parfaitement homogène que nous considérons présentement ; nous connaissons ainsi l'accumulation moyenne *vraie*, que nous appelons *moyenne de gisement*. Si nous amputons cette population de tous les puits non payants, nous obtenons une autre moyenne évidemment plus élevée que la première, et que nous appellerons la *moyenne haute*.

Amputons maintenant le gisement lui-même des « surfaces d'influence » non payantes au sens classique, c'est-à-dire les mailles μ encadrant les puits non payants effectivement creusés. La moyenne *vraie* de ce placer n'est autre que la moyenne de gisement elle-même (à de légères fluctuations près) en vertu de l'homogénéité du gisement.

Si maintenant nous éliminons du *calcul* de la moyenne de prospection tous les puits non payants, nous obtenons une *estimation de la moyenne haute*, et pas du tout de la moyenne vraie du placer.

Ainsi le procédé classique de délimitation des placers, reposant sur l'assimilation de la surface d'influence à celle de la maille nous conduit à une moyenne *non consistante*, c'est-à-dire ne se dispersant pas autour de la vraie moyenne, c'est-à-dire, en d'autres termes, affectée d'une erreur systématique.

Quant aux mailles amputées, elles sont évidemment sous-évaluées, puisqu'en les éliminant on leur attribuait, par définition même, une accumulation non payante, alors qu'elles possédaient en fait la moyenne vraie du gisement, soit donc la moyenne de placer elle-même.

Il est donc totalement illusoire de vouloir découper des placers dans des gisements parfaitement homogènes. Ou bien tout le gisement paie, ou il ne paie pas, ceci selon que sa moyenne est payante ou non.

Il n'est pas inutile de bien préciser, en terminant, que le caractère d'homogénéité ou d'hétérogénéité dont nous parlons ici est totalement indépendant de l'allure même de la courbe de distribution. Ce caractère s'estompe complètement lorsque l'on fait les intégrales de Lebesgue dont il était question au ch. I.

21.5. — A côté de ce cas purement théorique du gisement parfaitement homogène, considérons deux autres cas schématiques, mais qui peuvent se rencontrer :

a) le *gisement partout payant*, où l'accumulation est partout supérieure à l'accumulation-limite. Tel est le cas des runs, par exemple. Le rayon r_n des domaines non payants y est partout nul ;

b) le *gisement partout non payant* ; tel est évidemment le cas notamment des plages stériles. Le rayon r_p des domaines payants y est partout nul.

21.6. — Tout gisement réel peut cependant être considéré comme résultant de l'accollement de ces trois types théoriques de gisement : un centre partout payant, une bordure partout non payante, et, entre les deux, fatale-

ment une bande plus ou moins homogène en ce qui concerne la répartition des puits payants et non payants.

C'est dans cette bande homogène que la prospection va révéler des puits effectifs payants et des puits effectifs non payants. Si on applique alors le procédé classique de délimitation, on va partager cette bande intermédiaire en une *bande intérieure surévaluée* et en une *bande extérieure sous-évaluée*. Et nous retrouvons ainsi une idée développée pour la première fois par DEMELENNE [7].

Il importe donc d'abandonner ce procédé classique de délimitation, c'est-à-dire en tout cas d'éviter de faire passer les limites de placer à mi-chemin entre les derniers puits payants et les premiers puits non-payants.

21.7. — Tout le problème revient donc à la détermination de cette bande intermédiaire. Évidemment, la largeur de celle-ci dépend de la répartition locale des accumulations. Elle dépend naturellement de la valeur de la limite a^* ; elle dépend enfin de la borne supérieure ϵ que l'on voudra fixer aux fréquences parasites tolérées.

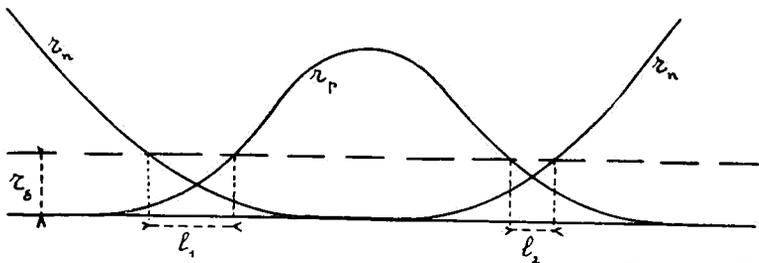


Fig. 21-7.

a^* et ϵ étant fixés, on peut dire en gros que les paramètres r_n et r_p varient selon la loi schématisée par la fig. 21.7. La bande intermédiaire est celle où r_n et r_p sont pratiquement nuls, c'est-à-dire inférieurs à r_ϵ pour ϵ fixé, r_ϵ étant suffisamment petit.

Un réseau idéal serait celui dont les côtés des mailles seraient inférieurs à la largeur moyenne \bar{l} de la bande ainsi définie, ϵ étant fixé en se basant sur des considérations pratiques. Cet idéal ne peut être atteint qu'au prix (assez élevé) de quelques prospections jointives exécutées sur des gisements types. En attendant, on peut proposer les règles pratiques suivantes :

21.8. — On améliorera déjà la situation en n'éliminant du calcul et du placer que les puits non payants se présentant par *groupes de deux voisins* au moins. Les puits non payants isolés peuvent en effet ne résulter que d'une fluctuation locale pour laquelle le domaine non payant peut être pratiquement nul.

Ensuite, on fera passer la limite du placer *sur* les puits payants marginaux, *et non entre* ceux-ci et leurs voisins non payants.

On bordera enfin le placer par une *bande de sécurité* dont la limite extérieure passera *sur* les puits voisins des puits frontières du placer. Cette bande de sécurité est une estimation de la bande intermédiaire plus ou moins homogène.

Comme cette bande est bordée d'une part par des accumulations supérieures à la limite, et d'autre part par des accumulations inférieures à cette limite, on lui attribuera d'office l'accumulation-limite moyenne. Son tonnage ne sera compté que pour mémoire. Il appartiendra à la division d'exploitation de contrôler par saignées la teneur réelle des différentes parties de la bande de sécurité.

Par ces moyens, on évitera en grande partie et la surévaluation des placers, et les pertes des réserves marginales.

§ 22. La « pondération » des fréquences.

22.1. — Craignant le danger de surestimation, dont ils n'apercevaient pas toujours les causes exactes, plusieurs auteurs ou praticiens ont proposé et appliqué des méthodes propres à réduire les moyennes de prospection. Elles se ramènent toutes au même principe de base : modifier plus ou moins profondément l'histogramme de prospection, plus profondément que ne le voudraient les procédés classiques d'ajustement. Mathématiquement, ces méthodes reviennent à attribuer aux fréquences observées f_i un certain poids p_i qui les transforme en des fréquences $f'_i = p_i f_i$, que l'on suppose être de meilleures estimations des fréquences véritables φ_i .

Tous ces procédés sont empiriques, et parfois difficilement justifiables. Ils entraînent tous le rejet de l'hypothèse des aires qu'ils remplacent par l'une ou l'autre hypothèse tout aussi gratuite, et parfois très osée. Tous, malgré leur apparence parfois savante, n'aboutissent qu'à un seul résultat, substituer à la moyenne de prospection, qui n'est pas consistante en général, une autre moyenne tout aussi peu consistante, mais dont l'avantage est d'être systématiquement plus petite que la moyenne brute de prospection. Ces procédés évitent donc les surestimations, mais ils doivent introduire, à la longue, une sous-estimation systématique des réserves.

22.2. — Parmi les plus connus de ces procédés, nous citerons :

1) **La méthode de réduction** des puits supposés exceptionnels (sans forage de puits de contrôle). C'est la méthode la plus empirique, la plus simple et peut-être pas la plus mauvaise de toutes, malgré la contradiction logique qu'elle dissimule (10.6). Il s'agit bien d'une modification de l'histogramme, puisqu'on attribue la fré-

quence O à des accumulations exceptionnelles, et une fréquence augmentée à d'autres accumulations, effectives ou possibles.

2) **La méthode de Watermayer** remplace les fréquences f_i de prospection par leur carré f_i^2 , autrement dit leur attribue un poids égal à elles-mêmes $p_i = f_i$. Cette méthode ne change évidemment pas la moyenne des distributions symétriques, mais elle resserre leur dispersion ; elle rapproche la moyenne du mode (diminue donc l'accumulation moyenne) si la distribution primitive est dissymétrique.

3) **La méthode de Truscott** [5] remplace les fréquences f_i par leur carré multiplié par l'accumulation a_i ; d'où $p_i = a_i f_i$. Cette méthode brise la symétrie éventuelle de la distribution primitive ; elle abaisse la moyenne dans certaines distributions de prospection, mais pas dans toutes ; par exemple, la moyenne dans une distribution de PEARSON type III (voir ci-après) *reste invariante* pour une transformation de TRUSCOTT.

4) **La méthode de Baty** [10] remplace l'histogramme par la superposition de deux distributions de GAUSS, ce qui est assez audacieux, et difficilement justifiable pour les distributions à caractère nettement unimodulaire. Les puits à forte accumulation (y compris donc les exceptionnels) sont tous ramenés à la plus haute des deux moyennes gaussiennes.

22.3. — A côté de ces procédés discutables, mais parfois propres à rendre la moyenne plus consistante, existent des procédés classiques, éprouvés, propres à la rendre plus efficace. Nous en parlerons un peu dans ce §, bien que, à proprement parler, ils ne reposent en rien sur l'introduction des « poids ».

Ils consistent essentiellement en un changement de

variable $a = g(x)$, tel que la nouvelle variable x se distribue selon une loi de GAUSS. De la forme mathématique des transformations, on déduit alors la relation qui relie \bar{x} à \bar{a} , relation qui, en général, n'est pas du tout $\bar{a} = g(\bar{x})$, bien entendu. L'intérêt de la méthode réside en ce que \bar{x} peut être nettement plus efficace que \bar{a} .

Le plus commun de ces changements de variable est celui où $x = \log a$. Il n'est évidemment intéressant que si $\log a$ se distribue selon une loi de GAUSS — ce qui n'est vrai que dans certains problèmes de statistique. Il serait en tout cas hasardeux de prétendre qu'il doive en être toujours ainsi pour toutes les populations de gisement.

Si cette condition est cependant réalisée, la *moyenne géométrique* (19.2.d) est un paramètre plus efficace et plus représentatif que la moyenne arithmétique.

HANCOCK [9] pose en principe que l'accumulation moyenne géométrique de prospection doit être considérée comme une estimation intéressante de l'accumulation moyenne arithmétique vraie ; prise dans son sens littéral, l'assertion est totalement inexacte. Mais comme la moyenne géométrique est toujours plus petite que la moyenne arithmétique, le **procédé de Hancock** a ceci de bon qu'il élimine sûrement la plupart des surévaluations ; bien entendu, il peut conduire à la longue à une sous-évaluation systématique des réserves. Il a aussi l'avantage de se prêter aisément au calcul graphique sur papier logarithmique.

§ 23. Le contrôle de la prospection par l'exploitation.

23.1. — Ce contrôle doit être entrepris avec la plus grande prudence. Il faut tout d'abord s'assurer que les conditions techniques de l'excavement et du lavage d'exploitation soient comparables à celles de prospection, et notamment qu'il ait été tenu compte des pertes aux tables. Il faut que l'exploitant ait suivi le tracé des

placers tel que le lui avait indiqué le prospectant et l'évaluant. Enfin, il faut être certain qu'il n'y ait pas eu de transport accidentel de minerai d'un gisement vers un autre.

Certains auteurs crient victoire parce que l'une ou l'autre méthode d'évaluation qu'ils préconisent les conduit, dans certains cas isolés, à retrouver exactement, ou presque, le résultat obtenu par l'exploitation. C'est adopter là une attitude peu scientifique, car même si les conditions ci-dessus sont parfaitement remplies (ce qui est rarement le cas), une pareille concordance doit toujours être considérée, en statistique mathématique, comme purement fortuite, sinon comme hautement suspecte.

Tout aussi peu raisonnable est l'attitude (trop fréquente) de l'exploitant qui accuse l'évaluant et ses méthodes de l'avoir conduit une fois accidentellement à une exploitation déficitaire, oubliant ainsi les autres cas, nombreux, où la prospection a permis des prévisions satisfaisantes. La prospection est un jeu de hasard ; si elle est bien conduite, l'exploitant est aussi sûr de son bénéfice global que peut l'être le tenancier d'une maison de jeux, mais il ne doit pas se plaindre si exceptionnellement « rouge » est sorti dix fois de suite et lui a fait perdre ainsi tout le gain d'une soirée !

Seule donc une étude longue et impartiale, portant sur un grand matériel statistique, permettra de tirer des conclusions sûres quant au contrôle de la prospection par l'exploitation. En l'absence de ce contrôle, la critique la plus profonde s'impose en ce qui regarde les méthodes d'évaluation. Faute de critique externe, il faut se contenter de la critique interne, et éliminer toute méthode présentant des vices de forme.

CHAPITRE V

ÉVALUATION PAR LES FONCTIONS GAMMA INCOMPLÈTES ET PAR LES GRAPHIQUES Γ

§ 24. Sommaire.

24.0. — Il nous reste maintenant à indiquer le procédé que nous proposons pour la détermination pratique de la meilleure moyenne et de sa dispersion. Ce procédé est essentiellement graphique ; il a l'avantage d'être rapide, simple, suffisamment précis, et d'éviter à un ingénieur travaillant en brousse de longs et pénibles calculs numériques. Enfin, il permet de résoudre assez élégamment le problème des ré-évaluations.

La méthode est originale en ce qui concerne son application graphique ; elle est classique en ce qu'elle a recours aux célèbres Fonctions Gamma Incomplètes, étudiées par K. PEARSON à la fin du siècle dernier.

§ 25. Les fonctions III de PEARSON et les fonctions gamma.

25.1. — En 13.11, nous avons rappelé l'équation différentielle de la loi de dispersion de GAUSS, appelée parfois « première fonction de distribution de LAPLACE ». Nous la retranscrivons ici, après avoir posé

$$\epsilon \equiv z - \hat{z}$$

où \hat{z} est le mode (qui s'identifie *ici* à la moyenne) :

$$\frac{d \log \theta}{dz} = - \frac{z - \hat{z}}{\sigma^2}$$

25.2. — PEARSON a généralisé l'équation de GAUSS

en considérant les fonctions *unimodales* qui soient intégrales de

$$\frac{d \log \theta}{dz} = - \frac{z - \hat{z}}{f(z)}$$

\hat{z} est bien le mode, puisque la dérivée de φ s'annule pour $z = \hat{z}$, ainsi qu'on le voit immédiatement.

Si on développe $f(z)$ en série :

$$f(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots$$

on voit tout de suite que la courbe de GAUSS correspond au cas particulier où ce développement s'arrête à son premier terme c_0 , valant tout simplement alors σ^2 , second moment par rapport à la moyenne. On démontre que les $n + 1$ premiers coefficients c_0, c_1, \dots, c_n , sont fonctions des $n + 2$ premiers moments [3].

Les représentations de PEARSON couvrent donc théoriquement tous les cas possibles de distributions unimodales (pour lesquelles existent les moments voulus, ce qui est généralement le cas), puisqu'elles assurent la conservation des moments de la distribution considérée.

25.3. — En fait, cette méthode n'est possible en toute rigueur que si on l'applique à des populations-mères entièrement connues. Mais si on veut l'appliquer à des populations d'échantillonnage, en espérant ainsi obtenir des estimations de plus en plus améliorées, il apparaît tout de suite que l'on tourne au contraire rapidement le dos à la réalité : en effet, puisque les moments sont de plus en plus mal estimés au fur et à mesure que n augmente, le développement de $f(z)$ sera de plus en plus fantaisiste si on le pousse trop loin. La pratique montre qu'il est inutile de vouloir dépasser le terme quadratique, les moments du 4^e ordre étant les derniers à être représentés par l'échantillonnage avec une efficacité encore raisonnable. PEARSON estime d'ailleurs ce développe-

ment à 3 termes suffisant pour la plupart des besoins de la pratique, et il note :

« If we take $f(z) = c_0$, we reach the Gaussian, in which each contributory cause-group is independent, and if the number of groups be not very large, each cause-group is of equal valency and contributes with equal frequency results in excess and defect of its mean contribution.

« If we take $f(z) = c_0 + c_1z$, then each contributory cause-group is still of equal valency and independent, but does not give contributions in excess and defect of equal frequency.

« Finally, if we take $f(z) = c_0 + c_1z + c_2z^2$, then contributory cause-groups are not of equal valency, they are not independent, but their results correlated, and further contributions in excess and defect are not equally probable. »

25.4. — Nous estimons que le second cas particulier envisagé par PEARSON — et qu'il avait appelé « type III » — celui où $f(z) = c_0 + c_1z$, est suffisant pour les besoins de la prospection, et qu'il est inutile, voire dangereux, de s'occuper des autres cas. La raison profonde doit s'en chercher dans l'existence des puits exceptionnels qui, précisément, faussent totalement le calcul du 4^e moment. Il y a d'ailleurs d'autres raisons :

On démontre qu'une variable z dispersée selon le type III couvre tout l'intervalle $(0, +\infty)$, ce qui est précisément le cas (théorique) des accumulations. Le type III présente des distributions en cloche plus ou moins dissymétriques, et des distributions du type hyperbolique ce qui est toujours le cas des distributions unimodales de prospection (20.7) ; les autres types présentent notamment des courbes symétriques, des courbes en U, des distributions absolument plates, toutes étrangères à la minéralisation. Le type III contient comme cas limites les deux cas limites de la minéralisation : le champ excessivement riche et régulier et le champ excessivement pauvre et irrégulier. Enfin, le phénomène de la ségrégation (cfr chap. 0) semble bien obéir aux remarques ci-dessus formulées par PEARSON à propos du type III.

Notons enfin que les fonctions III de PEARSON sont apparues d'une application tellement courante en statistique que, dès 1903, K. PEARSON entreprit d'en calculer des tables, aujourd'hui classiques, appelées *Tables of the Incomplete Gamma-Function*.

En résumé, nous dirons que le type III constitue une première approximation des courbes unimodales des distributions de prospection, mais que cette approximation, dans le cadre de toutes les fonctions de Pearson, est non seulement suffisante, mais nécessaire, étant donné que les moments d'ordre supérieur à 3 sont très souvent douteux, et que leur emploi pourrait conduire à de moins bonnes approximations que le type III.

D'autre part, attendu que le moment d'ordre 3 lui-même nous est apparu, à l'expérience, comme très souvent délicat à calculer, nous avons préféré, aux méthodes de calcul numérique, une méthode de calcul graphique.

25.5. — Moyennant un changement d'origine, toujours faisable, puisque c_1 est essentiellement $\neq 0$, à savoir :

$$z = x - c_0/c_1$$

l'équation différentielle du type III se ramène à la forme

$$\frac{d \log \varphi}{dx} = - \frac{x - \hat{x}}{c_1 \cdot x}$$

Si nous désignons par τ^3 le moment du 3^e ordre, on a

$$c_1 = \frac{\tau^3}{2\sigma^2} \quad \text{et} \quad \hat{x} = \frac{2\sigma^4}{\tau^3} - \frac{\tau^3}{2\sigma^2} = \frac{4\sigma^6 - \tau^6}{2\sigma^2\tau^3}$$

relations que nous admettrons ici sans démonstration.

Notons que pour c_1 très petit et x très grand, le produit $c_1 x$ peut être considéré comme sensiblement constant, et notre équation différentielle nous restitue la courbe de GAUSS.

25.6. — Pour intégrer cette équation, il faut d'abord la ramener à la forme standard en posant

$$u = x/c_1$$

et

$$p \equiv u \equiv \frac{\hat{x}}{c_1} = \frac{4\sigma^6 - \tau^6}{\tau^6} = \frac{4\sigma^6}{\tau^6} - 1$$

d'où :

$$\frac{d \log \varphi}{du} = -1 + \frac{p}{u}$$

qui donne :

$$\varphi = \text{Cte} \cdot e^{-u} u^p$$

Il est commode d'introduire aussi le paramètre k

$$k \equiv \frac{c_1}{\sigma} = \frac{\tau^3}{2\sigma^3} \quad \therefore \quad p = \frac{1}{k^2} - 1 \quad \text{et} \quad k = \frac{1}{\sqrt{p+1}}$$

D'où aussi :

$$\hat{x} = p c_1 = \frac{p \sigma}{\sqrt{p+1}} = p k \sigma$$

On dispose de la constante d'intégration pour normaliser la courbe ; or, par définition de notation habituelle,

$$\int_0^{\infty} e^{-u} u^p du \equiv \Gamma_{p+1}$$

Γ_{p+1} est une transcendante bien connue appelée *Fonction Gamma* (complète) de p , ou *intégrale eulérienne de seconde espèce*, dont on trouve des tables dans les traités classiques. Ces fonctions sont définies uniquement lorsque $-1 < p < \infty$.

En abandonnant la forme standard, il vient ainsi pour $\varphi_p(x)$, après normalisation, l'écriture suivante :

$$\varphi_p(x) = \frac{1}{k \cdot \sigma \cdot \Gamma_{p+1}} \cdot \left(\frac{x}{k\sigma}\right)^p \cdot \exp\left(-\frac{x}{k\sigma}\right)$$

25.7. — La courbe des fréquences est donc, en écriture standart

$$\Phi_p(u) = \int_0^u \varphi_p(u) du = \frac{1}{\Gamma_{p+1}} \int_0^u e^{-u} u^p du$$

rappelons encore une fois que

$$u = x/k\sigma$$

Pour $u = \infty$, l'intégrale devient Γ_{p+1} ; telle est l'origine du nom de **Fonction Gamma Incomplète** donné à $\Phi_p(u)$.

La courbe des fréquences décroissantes (20.1) est évidemment

$$\Psi_p(u) = 1 - \Phi_p(u) = \frac{1}{\Gamma_{p+1}} \int_0^\infty e^{-u} u^p du$$

avec donc $\Psi_p(0) = 1$ et $\Psi_p(\infty) = 0$.

25.8. — Comme les fonctions gamma (complètes) jouissent de la propriété

$$\Gamma_{p+2} = (p+1)\Gamma_{p+1}$$

(propriété qui montre que ces fonctions sont des généralisations des factorielles), on démontre assez facilement que

$$\bar{u} = p + 1$$

d'où

$$\bar{x} = \sigma \sqrt{p+1} = \sigma/k$$

et

$$\bar{x} - \hat{x} = c_1 = k\sigma = \sigma/\sqrt{p+1}$$

PEARSON appelle *coefficient de dissymétrie* le rapport

$$\frac{\bar{x} - \hat{x}}{\sigma} = k.$$

Ainsi apparaît tout de suite le sens physique de ce paramètre k : plus k est grand, plus la distribution est dissymétrique. Le cas où $k = 0$, c.-à-d. celui où l'on a pratiquement $x - \hat{x} \ll \sigma$ correspond à la symétrie parfaite (courbe de GAUSS), et celui où $k = \infty$ c'est-à-dire où $\bar{x} - \hat{x} \gg \sigma$, à la dissymétrie totale.

25.9. — Une remarque très importante s'impose ici : les courbes φ et Φ passent par l'*origine des x* ; mais, dans un problème pratique traitant d'une variable aléatoire positive telle que l'accumulation a , l'origine des a véritables ne coïncide pas nécessairement avec celles des x théoriques. C'est là, si on veut, une imperfection de l'ajustement, mais d'un genre qui se rencontre souvent en statistique ; ainsi par exemple en biométrie l'emploi de la courbe de GAUSS conduit à l'attribution de fréquences extrêmement faibles, mais non nulles, aux hommes de tailles négative ! Il va de soi que pareilles imperfections n'ont aucune portée pratique.

En prospection, cette imperfection n'est tolérable que si elle n'a pas d'autre effet que d'attribuer des fréquences très faibles aux accumulations négatives, ou au contraire des fréquences nulles aux accumulations très faibles.

De toute façon, il ne faudra jamais oublier, dans tout problème d'évaluation utilisant les fonctions gamma incomplètes, de corriger la moyenne pearsonnienne \bar{x} de l'erreur systématique due au déplacement de l'origine de la courbe. Cette correction est facile ; si l'on a $\bar{x} - \bar{a} = x_0 = \text{constante}$, on aura évidemment $\bar{a} = \bar{x} - \bar{x}_0$.

25.10. — La **discussion analytique** se conduit assez aisément :

1) pour $p = 0$, on a $k = 1$, $\bar{x} = c = \sigma$, $\hat{x} = 0$
d'où

$$\varphi_0(x) = \frac{1}{\sigma} \cdot \exp\left(-\frac{x}{\sigma}\right) = \frac{1}{\bar{x}} \cdot \exp\left(-\frac{x}{\bar{x}}\right)$$

et

$$\Phi_0(x) = 1 - \exp\left(-\frac{x}{\sigma}\right)$$

$$\Psi_0(x) = \exp\left(-\frac{x}{\sigma}\right)$$

C'est la *distribution exponentielle*, appelée aussi « seconde fonction de distribution de LAPLACE », ou encore « type X » de PEARSON. Cette dernière dénomination se justifie par le fait que cette distribution n'a qu'un seul paramètre et qu'il suffit d'un seul moment (le second) pour le déterminer ; le « vrai » type III demande le calcul du second et du troisième moment.

2) Pour $p > 0$, l'étude montre que l'on obtient des courbes en cloche dont le mode s'écarte d'autant plus de l'origine que p est grand. On a toujours $\bar{x} > \sigma$.

En particulier, pour $p \geq 8$, on a $k \leq 1/3$, d'où $\bar{x} \geq 3\sigma$. Pratiquement donc, dans les problèmes d'évaluation où $p > 10$, on pourra confondre la courbe de PEARSON avec une courbe de GAUSS, ceci bien que pareille identification ne se fasse en toute rigueur mathématique que pour $p = \infty$.

3) Pour $p < 0$, mais > -1 , l'étude montre que l'on obtient des courbes en J renversé, asymptotiques aux deux axes coordonnés ; leur mode est imaginaire, bien que l'abscisse de ce mode soit réelle. On a toujours $\bar{x} < \sigma$.

25.11. — Nous appellerons « **Graphique Gamma** » le diagramme ayant pour axes coordonnés x et $\log \Psi$, l'axe (dessiné) des abscisses passant toutefois par le point $\Psi = 100$, ce qui donne les fréquences en %. Toutes les courbes de fréquence partiront donc d'un point origine défini par $x = 0$ et $\Psi = 100$ (voir figure 25.11). Ce diagramme présente les avantages suivants :

1) Il évite les calculs de normalisation. En effet, s'il s'agit d'un placier de 257 puits, par exemple, la courbe non normée part du point « log 257 » ; il suffit d'une translation de tout le diagramme le long de l'axe des ordonnées, jusqu'au point « log 100 » pour normaliser la courbe en %, car, pour chaque nombre d'arrivée n_i , on aura ainsi réalisé la transformation :

$$\log n_i - (\log 257 - \log 100) = \log \left(\frac{n_i}{257} \cdot 100 \right) = \log (f_i \%).$$

2) Il transforme l'exponentielle en une droite traversant obliquement tout le diagramme ; il transforme toutes les autres courbes du type III en arcs d'allure parabolique, dont la courbure presque toujours assez faible permet un ajustement graphique facile et sûr.

3) Il exclut automatiquement le 1 % supérieur de la distribution, c'est-à-dire la portion où l'on a le plus de chances de rencontrer les puits exceptionnels. Par contre, il présente le « corps » de la statistique (les premiers 90 %) comme une série de points beaucoup mieux rangés que sur un diagramme non logarithmique.

25.12. — Le diagramme 25.11 est un Graphique Gamma présentant :

1) le réseau des courbes de fréquences décroissantes pour p allant de $-0,95$ à 10 et distantes de telle façon que deux points de même fréquence, situés sur deux courbes voisines, soient distants de $\sigma/10$ tout au plus (environ) ;

2) le lieu des moyennes ;

3) le lieu des médianes ;

4) le lieu des modes (pour $p \geq 0$) ;

5) le lieu des accumulations égales respectivement à 5 fois et à 10 fois la moyenne ;

6) le lieu des écarts médians relatifs à la moyenne ;

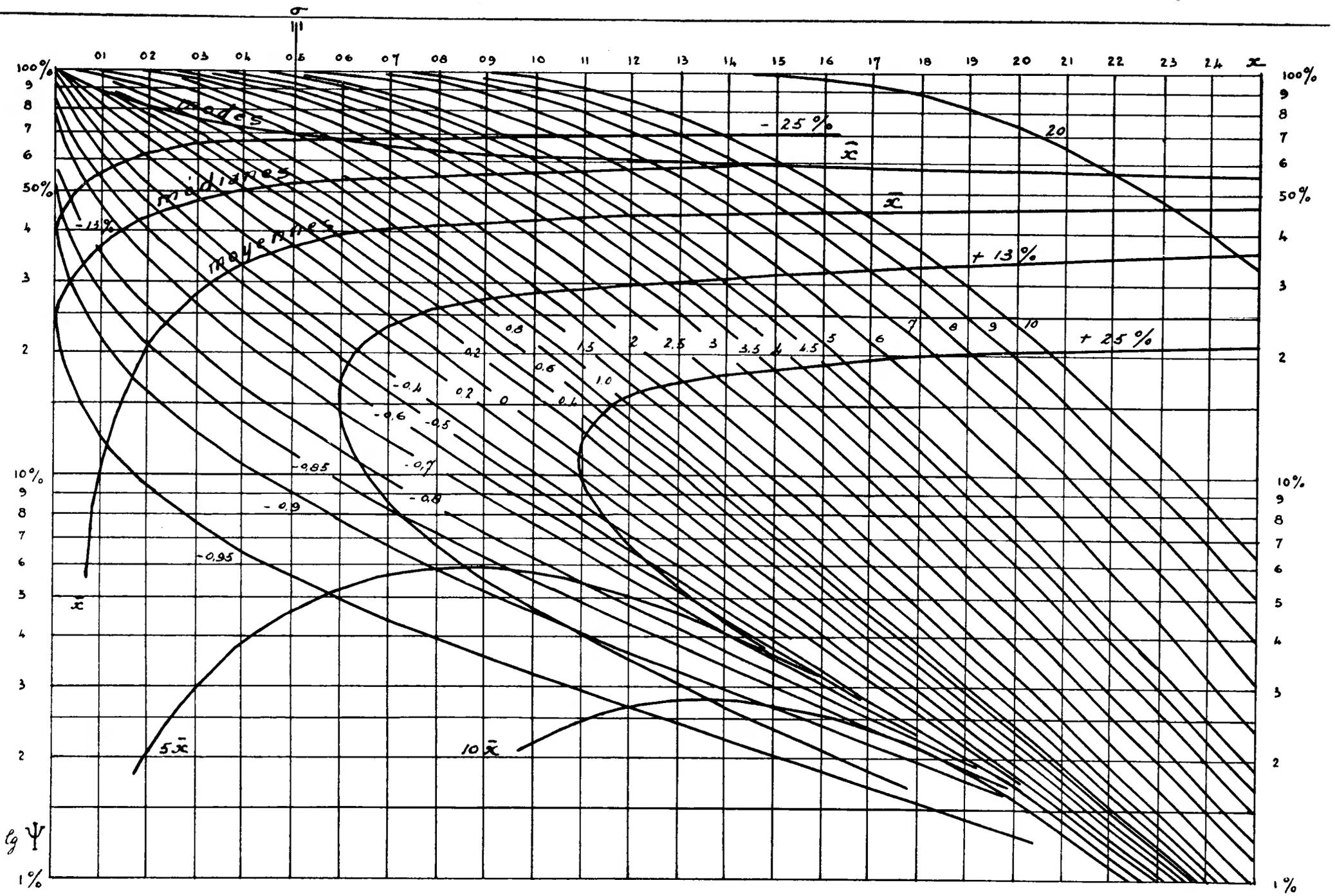


Diagramme 25.11.



l'écart médian supérieur n'existe plus à partir de $p = -0,85$ environ ;

7) le lieu des écarts « semi-médians » par rapport à la moyenne, écarts qui ont 12,5 % de chances de n'être pas dépassés ; l'écart semi-médian supérieur n'existe plus à partir de $p = -0,94$ environ.

Les lieux 2, 3, 4 ci-dessus donnent donc des paramètres de position ; les lieux 5, 6, 7, des paramètres de dispersion. Le paramètre fondamental σ est le même pour toutes les courbes d'un même graphique Gamma. Les besoins de la pratique imposent donc la construction d'une *batterie de graphiques*, ayant tous la même échelle des x (1 cm par hectogramme, par exemple), mais ayant chacun un σ à une échelle différente ; on peut déjà s'en tirer avec une batterie de 4 graphiques où σ vaudrait respectivement 3, 3,5, 4, 5 cm (pour l'échelle x du cm à l'Hgr).

On dresse ces diagrammes à partir des *Tables for Incomplete Gamma Functions* (Ed. Cambridge University Press).

25.13. — Le Graphique Gamma montre directement plusieurs propriétés intéressantes :

a) L'axe OY vertical représente la distribution singulière $p = -1$; c'est le gisement infiniment stérile présentant des puits minéralisés infiniment rares ; tous les écarts supérieurs de probabilité donnée sont inexistant, si petite que soit cette probabilité ; tous les écarts inférieurs sont nuls. Ce cas singulier est le cas limite extrême du gisement partout non payant.

b) L'axe OX horizontal représente la distribution singulière $p = \infty$; c'est une distribution gaussienne, mais de moyenne infinie. C'est le gisement infiniment riche, ne présentant de puits pauvres qu'avec une probabilité infiniment petite. Le mode, la moyenne et la médiane coïncident (on voit que tous ces lieux con-

vergent pour et vers $x = \infty$). C'est le cas limite théorique du gisement partout payant.

c) La droite oblique centrale représente la distribution exponentielle, dont les fréquences décroissent en progression géométrique. C'est le *gisement parfait*, raisonnablement limité, et où les puits stériles ne sont ni trop bien ni trop pauvrement représentés.

d) Les courbes à concavité tournée vers le haut ($p < 0$) représentent des placers ou des gisements trop étendus ; la moyenne en est relativement basse, et cependant ce sont les très fortes accumulations qui réussissent à lui donner sa valeur car les puits pauvres s'y présentent en proportion anormalement forte. La moyenne est peu efficace, l'écart supérieur tend à croître en disproportion avec cette moyenne. Les dangers de surévaluation ne sont pas à mépriser, et lorsque la surévaluation se produira, elle pourra aisément causer des erreurs du simple au double. L'apparition de ces courbes, surtout pour p notablement petit ($< -0,5$), traduit souvent une mauvaise délimitation des gisements par la faute d'une maille trop grande. Le forage de puits intercalaires amènera, avec une meilleure délimitation, l'élimination des puits pauvres en surnombre en même temps que l'apparition d'une distribution moins dissymétrique.

e) Les courbes à concavité tournée vers le bas ($p > 0$) représentent des placers trop restreints, d'où trop de puits pauvres ont été exclus (même si cette exclusion repose sur de très légitimes considérations de payabilité). Mais ils sont les plus intéressants pour l'évaluation, et les plus faciles à traiter, surtout dès que p devient > 1 . Lorsque ces distributions se présentent, il peut y avoir lieu de contrôler si la minéralisation ne se prolonge pas en dehors des limites, par exemple en dessous de la bordure surélevée des flats alluvionnaires, ou bien sur une terrasse proche de la terrasse étudiée.

f) Le graphique gamma montre aussi très clairement qu'aucune distribution ne donne plus de 6 % de chances d'arrivée aux accumulations valant 5 fois la moyenne ; mais ce seuil de 6 % est cependant encore trop élevé que pour permettre de qualifier à priori ces accumulations d'exceptionnelles. Ce critère, adopté par certains praticiens, n'a de valeur effective que pour les gisements au moins parfaits. Même les accumulations valant 10 fois la moyenne ont encore, dans certains gisements sur-étendus, près de 3 % de chances d'arrivée, ce qui est encore presque de trop que pour décider de l'exceptionnalité.

Ces critères prenant la moyenne pour étalon s'avèrent encore plus inefficaces si l'origine des a réels est décalée vers les x (théoriques) positifs, car alors, comme $\bar{a} < \bar{x}$, on a que $5\bar{a} < 5\bar{x}$, et l'accumulation valant 5 fois la moyenne peut avoir beaucoup plus de 6 % de chance d'arrivée. De pareils critères sacrifient donc la précision à la facilité d'emploi.

§ 26. L'évaluation par les graphiques gamma.

26.1. — Les règles pratiques d'évaluation graphique découlent immédiatement de ce qui précède :

1) Appliquer un papier calque sur un diagramme logarithmique muet (sans courbes) du type de ceux employés pour dresser la batterie de graphiques gamma ; y dessiner les axes OY et OX', ce dernier passant par l'ordonnée log N, N étant le nombre total des puits du gisement ou du placer ; choisir une échelle convenable pour les accumulations, c'est-à-dire soit l'échelle des graphiques, soit un multiple ou un sous-multiple simple de celle-ci ; le pire qui puisse arriver, après un mauvais choix de l'échelle, c'est de devoir recommencer le graphique (cfr 3^o ci-après).

2) Sur le calque toujours disposé comme ci-dessus, reporter les points de la ligne Ψ de prospection ; en d'autres mots, porter en ordonnée descendante les logarithmes des nombres d'arrivées totalisés pour les accumulations égales ou *supérieures* à l'accumulation en cause ; la chose est facile à exécuter, puisque l'axe vertical porte une échelle logarithmique graduée en nombres, comme une règle à calculs.

3) Chercher parmi toutes les courbes de la batterie de graphiques gamma celle qui, à vue, ajuste au mieux la ligne (polygonale) des fréquences de prospection, ligne dont les sommets viennent donc d'être dessinés lors du 2^o. Pour procéder à cette recherche, qui ne sera pas bien longue en général, il faut appliquer l'axe OX' du calque sur l'axe OX du graphique testé, les deux origines ne coïncidant pas nécessairement (25.9) ; en cas d'échec, essayer un autre graphique. Et en cas d'échec avec toute la batterie, recommencer le calque à une autre échelle. Le σ final pourra être d'ailleurs donné par interpolation de deux σ consécutifs donnés par des graphiques de la batterie.

4) Tracer la courbe d'ajustement, y marquer le point de la moyenne (intersection avec le lieu des moyennes). Projeter ce point verticalement sur l'axe OX' du calque, ce qui corrige automatiquement la moyenne de l'éventuelle erreur de déplacement de l'origine.

5) Lire en tête du graphique l'écart quadratique ainsi déterminé par l'adoption même de tel graphique plutôt que tel autre, puis le traduire dans l'échelle adoptée pour les accumulations. Cet écart ne caractérise, rappelons-le, que la distribution *des puits* dans le gisement ; il restera à calculer l'écart de la distribution *des moyennes*, ce qui est tout autre chose.

26.2. — Lorsqu'il apparaît nettement que ϕ est supé-

rieur à 8 ou mieux à 10, on se servira du diagramme 26.2 ou **graphique gaussien**. Celui-ci donne les courbes $\log(1 - \Theta)$, où Θ est l'intégrale de la courbe de GAUSS (13.12). Comme ces courbes n'ont qu'un seul paramètre, on n'aura besoin ici que d'un seul graphique sur lequel seront dessinées une série de courbes correspondant à différentes valeurs de σ .

On remarquera en passant la quasi-similitude d'allure des courbes gaussiennes et des courbes pearsoniennes lorsque $p = 10$ ou 20.

26.3. — Le diagramme 26.3 donne une comparaison logarithmique entre les deux distributions de LAPLACE, ou, plus exactement, entre les lignes des fréquences décroissantes d'une distribution gaussienne (ligne courbe) et d'une distribution exponentielle (ligne droite). Sur ce graphique, la moyenne gaussienne a été arbitrairement choisie égale à 3 fois la moyenne exponentielle.

Ce diagramme pourra servir de table approximative pour la recherche des probabilités d'arrivée d'une valeur donnée de la variable.

26.4. — Il nous reste à parler de l'**efficacité des moyennes** et à mettre en pratique les considérations du § 19. Lorsque N croît indéfiniment, la moyenne tend à disperser selon une courbe de GAUSS (13.14), mais cette tendance à l'efficacité ne pourra commencer à se faire pratiquement sentir que si l'écart quadratique de la moyenne tombe en-dessous du $1/3$ ou mieux du $1/4$ de la moyenne ; cette condition est nécessaire, mais non suffisante, ainsi que nous l'avons déjà dit (19.4). On doit donc avoir :

$$\bar{x} > \frac{3 \text{ à } 4}{\sqrt{N}} \sigma \quad \text{ou} \quad (x)^2 > \frac{15}{N} \sigma^2$$

Or, si la distribution est pearsonienne, on doit avoir

G

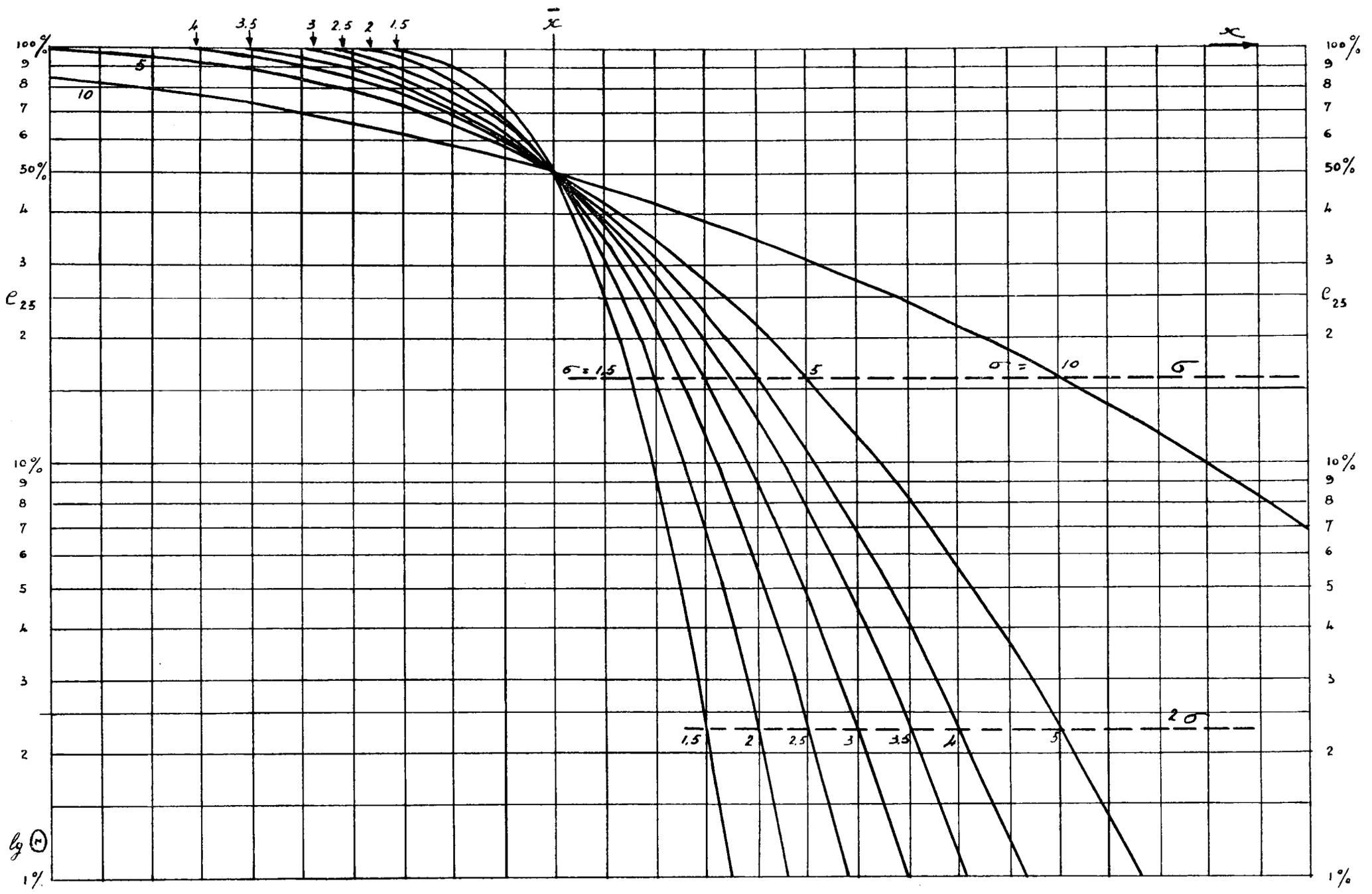
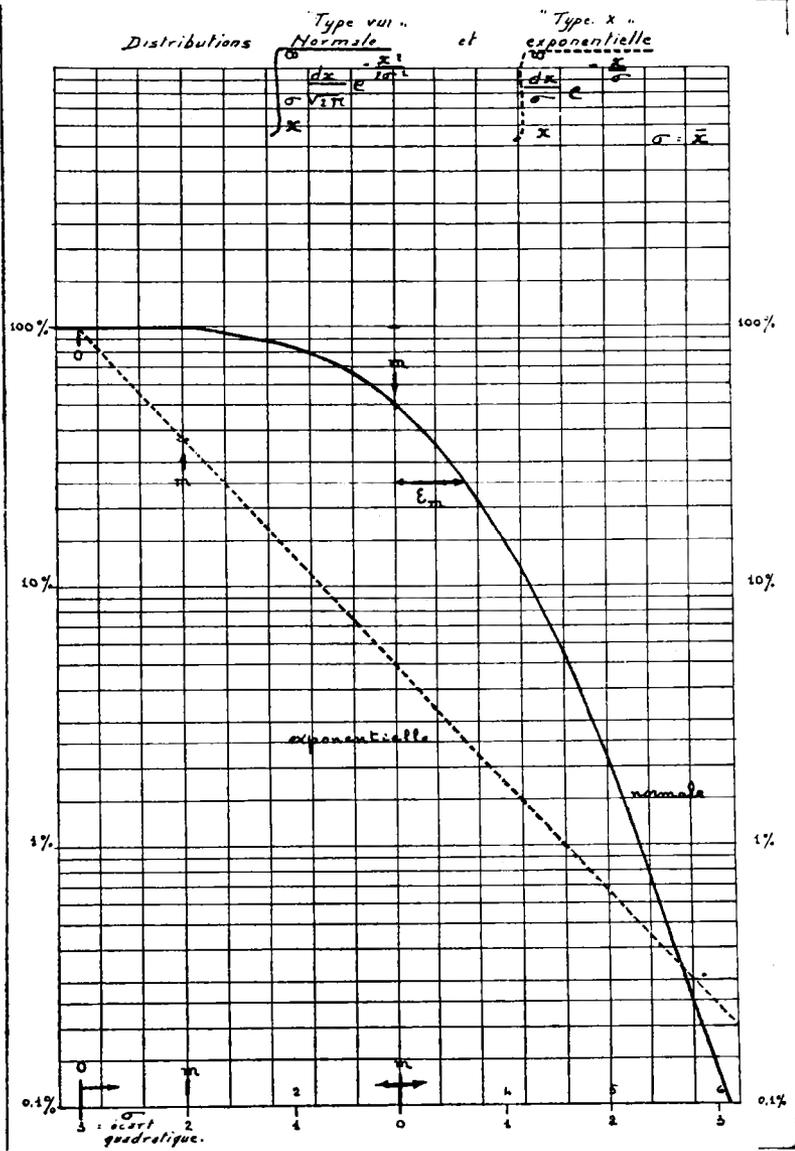


Diagramme 26.2.



$$(\bar{x})^2 = (p + 1) \cdot \sigma^2$$

dès lors, la condition d'efficacité est

$$N > \frac{15}{p + 1} \equiv \tilde{N}$$

condition qui se traduit numériquement par le tableau ci-contre; celui-ci donne donc, pour p fixé, le nombre minimum \tilde{N} de puits que doit compter le placer pour avoir une moyenne efficace.

p	\tilde{N}
2	5
0	15
-0,5	30
-0,8	75
-0,95	300

26.5. — Si maintenant l'échantillonnage de prospection est dispendieux — éventualité qui est toujours à craindre, — il intervient un coefficient de dispersion $\gamma > 1$, et l'on a :

$$(\bar{x})^2 > \frac{15}{N} (\gamma\sigma)^2 = \frac{15}{N_u} \cdot \sigma^2.$$

Le tableau 26.4 ne traitait donc que du cas particulier $\gamma = 1$. Il doit donc se compléter et donner le tableau ci-après.

p	N minimum pour γ^2 valant :					
	1	1.5	2	2.5	3	3.5
2	5	7	10	12	15	17
0	15	22	30	37	45	52
-0,5	30	45	60	75	90	105
-0,8	75	112	150	187	225	262
-0,95	300	450	600	750	900	1.050

Comme les distributions de prospection semblent se situer pour la plupart entre $p = 2$ et $p = -0,5$, et que d'autre part $\gamma^2 = 2$ est une valeur plus que raisonnable pour le carré du coefficient de dispersion, on peut dire à priori que *tout placer doit comprendre un nombre de puits de l'ordre de la trentaine au strict minimum.*

26.5. — Les conditions précédentes étant réalisées, on peut admettre en première approximation que les valeurs possibles de la moyenne vont se disperser selon une courbe de GAUSS, avec un écart quadratique

$$\sigma_m = \sigma / \sqrt{N_u}.$$

Les tables classiques (et le graphique 26.3) de $\Theta(x)$ montrent que :

1) l'*écart décan*, qui n'a que 10 % de chances de n'être pas dépassé dans un sens donné vaut très approximativement $\sigma_m/4$;

2) l'*écart médian* (ou probable) qui a 25 % de chances d'être passé ou non dans un sens donné vaut environ les $2/3$ (plus exactement les 0,675) de σ_m ;

3) l'*écart improbable*, qui a moins de 0,2 % de chances d'être passé, vaut $3\sigma_m$.

Il sera bon d'indiquer ces trois écarts en regard de chaque accumulation moyenne évaluée, afin que l'exploitant sache exactement à quoi s'en tenir quant au résultat présenté (voir les exemples en appendice).

26.6. — Si les conditions nécessaires d'efficacité ne sont pas réalisées, il devient difficile de déterminer les écarts et leurs probabilités d'arrivée. On pourra cependant faire l'hypothèse assez plausible suivante : Admettre, sous toutes réserves, que les moyennes non efficaces de prospection se distribuent elles-mêmes suivant une loi de PEARSON du type III, avec un paramètre p' défini par

$$(p' + 1) = N_u(p + 1) ;$$

on admettra en même temps que l'écart quadratique est de $\sigma/\sqrt{N_u}$. On relèvera alors sur un graphique gamma les écarts médians relatifs à la courbe p' , en n'oubliant pas de les traduire en accumulations au moyen de l'échelle adoptée pour σ .

Exemple: $p = -0,8$; $N_u = 36$; $a = 0,46 \text{ kg/m}^2$;
 $\sigma = 1 \text{ kg/m}^2$; d'où : $p' = 36 \times 0,2 - 1 = 6,2$.

Dans ces conditions, on a, pour les écarts médians supérieur e_+ et inférieur e_- , $e_+ = 0,8$ et $e_- = 0,6$; soit donc, pour $\sigma = 1/\sqrt{36} = 0,17$, $e_+ = 0,13$ et $e_- = 0,10 \text{ kg/m}^2$, alors que si la distribution des moyennes avait été gaussienne, on aurait eu $e_+ = e_- = 0,675 \times 0,17 = 0,11$. On a donc

$$0,46 = A + \begin{cases} + 0,13 \\ - 0,11 \end{cases} \quad \text{soit donc : } A = 0,46 + \begin{cases} + 0,11 \\ - 0,13 \end{cases}$$

On remarquera le changement de signe devant chacun des deux écarts médians ; l'écart supérieur est à ajouter à la vraie valeur A et par conséquent à soustraire de la valeur estimée 0,46 ; et inversement pour l'écart inférieur.

On notera aussi qu'il est ici impossible d'employer le double signe \pm pour donner l'encadrement de la vraie valeur, car il subsiste une dissymétrie entre les deux écarts médians. Il y a donc 50 % de chances de trouver la vraie valeur dans les limites indiquées, mais probablement pas à mi-distance des limites avec le maximum de chances ; autrement dit, la vraie valeur est toujours la plus probable, le mode de la distribution, mais elle n'en est plus la moyenne ni la médiane. Les écarts, ramenés en % sont de 24 et de 28 %, ce qui est une dissymétrie encore considérable pour une moyenne.

Si le gisement a une superficie de 4 Ha (gisement éluvionnaire, maille carrée de 20 m de côté), on voit que le tonnage a 50 % de chances de se trouver compris entre 13 et 23 tonnes, limites d'incertitudes évidemment considérables.

Cet exemple représente un cas extrême auquel il est possible de se heurter dans la pratique ; il faut cependant noter que le gisement n'offrait que la moitié du nombre

minimum de puits prévu en 26.5. Il appartient à l'ingénieur de décider s'il se contentera de cette approximation, ou s'il se décidera à creuser une trentaine d'autres puits. En pareil cas, une étude attentive des particularités géologiques du gisement s'impose avant tout (l'exemple était celui d'une vallée sèche, étroite et riche, enserrée dans un champ éluvionnaire pauvre et étendu).

CHAPITRE VI

LA RÉÉVALUATION ET LE GISEMENT PARFAIT

§ 27. Sommaire.

27.0. — Le problème de la réévaluation touche aux questions peu connues de la statistique des *systèmes ouverts* : une population étant connue ainsi que sa distribution, que devient cette dernière lorsqu'on ampute successivement la population de certains de ses éléments ?

Nous ne nous placerons ici que dans le cas tout à fait élémentaire de la *payabilité simple* : l'accumulation-limite est une constante indépendante du puits considéré. Dans ce cas, l'ablation de puits déclarés non-payants se traduira par une simple *amputation* de la courbe de distribution, sans que le restant de la courbe subisse la moindre déformation ; et ceci est vrai qu'il s'agisse d'une première évaluation ou de réévaluations successives. Les moyennes successives (tout comme les moments successifs d'ordre quelconque) sont des fonctions de la seule accumulation-limite a^* et seulement par le truche-

ment de la borne inférieure du domaine d'intégration ; autrement dit, ces moyennes et moments sont de simples fonctions intégrales $\int_{a^*}^{\infty}$ d'une fonction toujours la même.

Dans le cas général de la payabilité quelconque, où a^* est une fonction de puits, les nouvelles moyennes devront se calculer par des intégrales portant sur des distributions chaque fois autres, et dont on ne sait pas dire grand chose a priori. Le changement de limite aura ainsi amené non plus une simple amputation, mais bien une *déformation* de l'histogramme.

Dans les cas pratiques, même si la payabilité simple est admise, il ne faut pas s'attendre nécessairement à la simple amputation de la courbe, car il subsistera toujours dans les placers des puits non-payants isolés qu'il vaut mieux ne pas éliminer (21.8). Dès lors, la nouvelle courbe de distribution ne saura pas débiter à gauche par une ordonnée bien droite (cas pur de l'amputation), mais bien par une ligne courbe tout comme dans une distribution en cloche très dissymétrique. Dans ce qui va suivre, nous nous tiendrons toutefois au seul cas théorique de l'amputation.

§ 28. Le gisement parfait.

28.1. — Nous définirons avec précision comme suit le **gisement parfait** : 1) la distribution des accumulations est exponentielle ; 2) les hauteurs des différentes couches sont des constantes ⁽¹⁾.

Il résulte de ces deux propriétés que les teneurs d'un gisement parfait se distribuent elles-mêmes exponentiellement.

Dans la pratique de la prospection, on ne rencontrera pas plus de gisement parfait qu'on ne rencontre de gaz parfaits en thermodynamique pratique. Néanmoins, on

⁽¹⁾ En pareil cas, on dit aussi que les hauteurs admettent comme fonction de distribution la fonction singulière $\delta(h)$ de DIRAC.

rencontrera assez souvent des gisements plus ou moins parfaits, ou même sensiblement parfaits. Si on veut, la valeur du paramètre pearsonnien p sera prise comme mesure de l'imperfection du gisement (25.10) ; $\log(p + 1)$ sera encore une autre mesure de l'imperfection, mais plus homogène. Tout abstrait qu'il soit, le gisement parfait n'en présentera pas moins une utilité assez grande, tout comme le gaz parfait en physique. Et son étude constituera toujours un premier pas nécessaire dans la voie d'une théorie générale de la réévaluation.

28.2. — Nous introduirons aussi à cette occasion une distinction précise entre les notions de gisement et de placer parfaits. Le *gisement parfait* ou *placer-zéro parfait*, tout en obéissant à la définition ci-dessus, présente une gamme complète d'accumulations, depuis 0 jusque $+\infty$. Le *placer parfait* ou mieux le *placer (a^*) parfait* ne présente qu'une gamme allant de a^* jusque $+\infty$, tout en obéissant aussi à la même définition.

Enfin, nous rappellerons une dernière fois que les placers extraits d'un gisement parfait seront toujours supposés engendrés, dans ce qui suit, par simple ablation pratiquée sur la population des puits, et par simple amputation de la courbe exponentielle.

28.3. — **Théorème I** ou **Théorème fondamental** : *Les formules relatives au placer (a^*) extrait d'un gisement parfait s'obtiennent à partir des formules relatives au gisement lui-même, par simple substitution de ($a - a^*$) à a .*

En effet, les formules 25.9 montrent clairement que la probabilité pour qu'un puits *du gisement* soit intérieur au placer (a^*) (c'est-à-dire pour que $a \geq a^*$) est

$$\Psi(a^*) = \exp\left(-\frac{a^*}{\sigma}\right)$$

Donc $\Psi(a^*)$ est l'intégrale non normalisée de la courbe de distribution *dans le placer* ; pour la normaliser, il suffira de

la multiplier par $\exp\left(+\frac{a^*}{\sigma}\right)$. Mais alors, cette intégrale normalisée sera celle de la courbe

$$\varphi(a^*) = \frac{1}{\sigma} \exp\left(-\frac{a - a^*}{\sigma}\right)$$

qui n'est autre que la fonction de distribution du gisement total dans laquelle a été faite la substitution indiquée dans l'énoncé. Et comme toutes les propriétés du gisement vont découler de cette fonction $\varphi^*(a)$, la même substitution apparaîtra dans toutes les formules.

28.4. — **Corollaire 1** : La ligne des fréquences décroissantes *du placer* (a^*) est donc

$$\Psi_*(a) = \exp\left(-\frac{a - a^*}{\sigma}\right)$$

$\Psi_*(a)$ donne donc la probabilité de rencontrer une accumulation $\geq a$ dans le *placer* (a^*).

Corollaire 2 : *L'écart quadratique est le même dans tout placer* (a^*) *que dans le gisement parfait complet.* L'écart quadratique σ est donc un invariant vis-à-vis des changements d'accumulation-limite.

28.5. — **Théorème II** : *L'accumulation moyenne du gisement parfait est égale à l'écart quadratique :*

$$\sigma = \bar{a}$$

Cette propriété, déjà signalée en 25.9, se démontre aisément par un simple calcul d'intégrale.

28.6. — **Théorème III** : *L'accumulation moyenne \bar{a}_* d'un placer* (a^*) *extrait d'un gisement parfait est égale à l'accumulation moyenne \bar{a} du gisement augmentée de l'accumulation-limite a^* .*

En effet, si dans l'égalité du théorème précédent nous opérons la substitution permise par le théorème fondamental, il vient, au lieu de

$$\sigma = \bar{a}$$

l'égalité

$$\sigma = (\overline{a - a^*}) = \bar{a}_* - a^*$$

qui combinée avec la précédente donne

$$\bar{a}^* = \bar{a} + a^*.$$

28.7. — **Corollaire 1** : *L'expression $\bar{a}^* - a^*$ est un invariant vis-à-vis des changements de limite.* En effet, elle vaut l'invariant fondamental σ .

Corollaire 2 : *Si l'accumulation-limite a^* subit un accroissement Δa^* , l'accumulation moyenne \bar{a}^* du placer (a^*) subit un accroissement égal, en grandeur et en signe.* En effet :

$$\Delta(\bar{a}_* - a^*) = \Delta\sigma = 0 \quad \dots \quad \Delta\bar{a}_* = \Delta a^*.$$

28.8. — **Théorème IV** : *Le taux de variation relative du volume par rapport à l'accumulation-limite est un invariant vis-à-vis des changements de limite.*

En effet, soit V_0 le volume du placer-zéro et V_* celui du placer (a^*). Comme ces volumes sont toujours proportionnels aux surfaces (28.1.2°) et que celles-ci mesurent les probabilités d'arrivées d'accumulations supérieures à a^* , on a

$$V_* = V_0 \exp\left(-\frac{a^*}{\sigma}\right).$$

Une simple dérivation démontre alors le théorème :

$$\frac{dV_*/V_*}{da_*} = -\frac{1}{\sigma}.$$

Cette égalité n'est d'ailleurs rien d'autre que la définition différentielle toute classique de l'exponentielle.

28.9. — **Corollaire** : *Pour une légère variation de la limite, l'accroissement relatif du volume est proportionnel à l'accroissement relatif de l'accumulation-limite (resp. de*

l'accumulation moyenne de placer) et à l'accumulation limite elle-même (resp. à l'accumulation moyenne).

En effet, de l'équation différentielle (29.8) on tire immédiatement, en passant de l'infiniment petit au fini petit :

$$\frac{\Delta V_*}{V_*} = - \frac{\Delta a^*}{a^*} \frac{a^*}{\sigma} = - \frac{\Delta \bar{a}_*}{\bar{a}_*} \frac{\bar{a}_*}{\sigma}.$$

28.10. — **Théorème V** : *Pour une légère variation de la limite, l'accroissement relatif du tonnage est proportionnel à l'accroissement relatif de l'accumulation moyenne de placer et à l'accumulation-limite.*

En effet, on a, par définition, pour le placer (a^*) :

$$Q_* = \frac{V_*}{H} \cdot \bar{a}_* = \frac{V_0}{H} (a^* + \sigma) \exp\left(-\frac{a^*}{\sigma}\right).$$

Par différentiation et passage au fini petit, on a :

$$\frac{\Delta Q_*}{Q_*} = - \frac{\Delta \bar{a}_*}{\bar{a}_*} \frac{\bar{a}_*}{\sigma}.$$

28.11. — **Exemple** : Les théorèmes ci-dessus, caractéristiques du gisement parfait, permettent des « réévaluations expresses ». Soit un placer de 1 mètre de hauteur de gravier, limité à $a^* = 0,4$ kg/m² ; son accumulation moyenne est de 1,4 kg/m² et son invariant $\sigma = 1,0$ kg/m². Comme $1,4 = 0,4 + 1,0$, on peut en induire que le placer est parfait, tout au moins aux environs de $a = 0,4$. Portons la limite à 0,5, c'est-à-dire augmentons-la de 25 %. On a $\Delta a^* = + 0,1$; cette grandeur peut être considérée comme petite, son carré ne valant que 1 % de σ^2 . On a, en unités σ , $a^* = 0,4$ et $\bar{a}_* = 1,4$. Par conséquent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{nouvelle moyenne : } 1,4 + 0,1 = 1,5 \text{ kg/m}^2 \text{ ; accroissement : } 7 \% \\ \text{diminution de volume : } 7 \times 1,4 = 10 \% = 25 \times 0,4 \\ \text{diminution de tonnage : } 7 \times 0,4 = 3 \% \end{array} \right.$$

et la réévaluation est terminée...

28.12. — **Théorème VI** : *L'accumulation-bénéfice est un invariant vis-à-vis des changements de limite.*

En effet, cette grandeur, définie en 10.8, vaut ici :

$$c \equiv \bar{a}_* - a^* = \sigma.$$

Ainsi, σ est non seulement un invariant « technique », mais aussi « économique ». Il résulte de cette propriété que *le bénéfice au m^3 ou au m^2 ne dépend que du cours du métal μ^** :

$$b = \mu^* \cdot \sigma \quad g = \frac{1}{H} \cdot \mu^* \cdot \sigma.$$

C'est une très curieuse propriété du gisement parfait, qui prend toute son importance lorsque le changement de limite n'est imposé que par des changements internes dans l'économie de l'exploitation, et non par des variations du marché mondial.

28.13. — **Théorème VII** : *Pour une légère variation de la limite, due au seul changement du rendement de l'exploitation, l'accroissement relatif du bénéfice est proportionnel à l'accroissement relatif de l'accumulation-limite (resp. de l'accumulation moyenne de placer) et à l'accumulation-limite elle-même (resp. à l'accumulation moyenne).*

Ce théorème n'est qu'un corollaire des théorèmes VI et IV (et de son corollaire). En effet, le bénéfice au m^3 étant indépendant des changements de rendement de l'exploitation, le bénéfice total restera toujours proportionnel au volume. Par conséquent, l'accroissement relatif du bénéfice sera toujours égal à celui du volume ; et ainsi, d'après les formules 28.9 on aura :

$$\frac{\Delta B_*}{B_* + C} = - \frac{\Delta a^*}{a^*} \frac{a^*}{\sigma} = - \frac{\Delta \bar{a}_*}{\bar{a}_*} \frac{\bar{a}_*}{\sigma}.$$

(Rappelons que C représente les immobilisations (10.6) ;

c'est par rapport à $B_* + C$ que doit être calculé l'accroissement relatif).

28.14. — **Théorème VIII** : *Pour une légère variation de la limite, due au seul changement du cours du minerai, l'accroissement relatif du bénéfice est proportionnel à l'accroissement relatif de l'accumulation-limite et à l'accumulation moyenne de placer.*

En effet, différentiant logarithmiquement la formule du bénéfice

$$B_* + C = \frac{V_*}{H} \mu^* \sigma$$

il vient

$$\frac{dB_*}{B_* + C} = \frac{d\mu^*}{\mu^*} + \frac{dV_*}{V_*}$$

Or, comme, d'après 10.4

$$\mu^* = \frac{\nu \cdot H}{a^*}$$

il vient

$$\frac{d\mu^*}{\mu^*} = - \frac{da^*}{a^*}$$

on a, en introduisant la différentielle logarithmique du volume (donnée en 28.8) :

$$\frac{dB_*}{B_* + C} = - \frac{da^*}{a^*} - \frac{da^*}{\sigma} = - \frac{da^*}{a^*} \bar{a}_*$$

En passant au fini petit, on trouve le théorème.

28.15. — Les formules des théorèmes IV (corollaire), V, VII et VIII méritent d'être rapprochées ; nous les transcrivons ici en employant la notation $\Delta \%$ pour désigner les variations relatives :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \% Q_* = -\frac{a^*}{\sigma} \Delta \% \bar{a}_* \\ \Delta \% V_* = -\frac{a^*}{\sigma} \Delta \% a^* \\ \Delta \% B_* = -\frac{\bar{a}_*}{\sigma} \Delta \% \bar{a}_* \quad (\mu^* = \text{constante}) \\ \Delta \% B_* = -\frac{a^*}{\sigma} \Delta \% a^* \quad (\nu = \text{constante}) \end{array} \right.$$

Si les deux facteurs μ^* et ν déterminant la limite viennent à varier simultanément, la variation relative du bénéfice est la somme des deux $\Delta \% B_*$ ci-dessus, ou encore :

$$\Delta \% B_* = \frac{\bar{a}_*}{\sigma} \Delta \% \mu^* - \frac{a^*}{\sigma} \Delta \% \nu.$$

Cette dernière formule nous renseignera de combien il faudrait essayer de forcer le rendement de la mine pour au moins compenser une perte de bénéfice due à une chute du cours μ^* du métal. Cette condition, $\Delta \% B_* \geq 0$, entraîne

$$\frac{\Delta \nu}{\Delta \mu^*} \geq \frac{\bar{a}_*}{H} \equiv t^*$$

comme le montre un calcul facile (en n'oubliant pas que $\Delta \mu^* < 0$).

On peut appliquer ces formules à l'**exemple** du n° 28.11 : Supposons que la limite 0,4 provienne de ce que le cours était de $\mu^* = 40$ fr/kg et le prix de revient de $\nu = 16$ fr/m³. Supposons que la limite nouvelle 0,5 soit imposée à cause d'une hausse à 45 fr du cours et à 22,50 fr du prix de revient. On a ainsi $\Delta \% \mu^* = 12,5 \%$ et $\Delta \% \nu = 40,6 \%$; il vient

$$\Delta \% B_* = 12,5 \times 1,4 - 40,6 \times 0,4 = + 1,25 \%$$

ceci, rappelons-le, pour un volume à traiter diminué de

10 % et un tonnage réduit de 3 % par rapport à ceux du placer (0,4). Si au contraire le cours était tombé à 36 fr, c'est-à-dire avait subi une chute de 10 %, on ne saurait maintenir le bénéfice initial qu'en ramenant le prix de revient à 10,40 fr, puisque $\Delta B_* = 0$ pour $\Delta \nu = 1,4 \times 4. = 5,60$ fr.

28.16. — Nous traiterons pour finir un cas où la payabilité n'est pas simple, celui où a^* n'est plus une « accumulation-limite » mais simplement une *accumulation-frontière* dont va dépendre le paramètre ν de prix de revient. Pour nous rapprocher de l'exemple qui sera présenté ensuite, nous raisonnerons exceptionnellement ici avec les teneurs plutôt qu'avec les accumulations, et nous admettrons une loi linéaire pour ν :

$$\nu = \nu_0 + \mu_1 \cdot t^*$$

Il s'agit donc de déterminer la frontière assurant le bénéfice maximum, c'est-à-dire en fait la *véritable teneur-limite*, que nous noterons maintenant \hat{t}^* .

On a donc

$$\begin{aligned} B_* + C &= V_* \mu^* \bar{t}_* - V_*(\nu_0 + \mu_1 t^*) \\ &= V_0 \cdot \mu^* \left(t^* + \sigma - \frac{\nu_0}{\mu^*} - \frac{\mu_1}{\mu^*} t^* \right) \cdot \exp \left(-\frac{t^*}{\sigma} \right) \\ &= V_0 \mu^* \sigma \left[\left(1 - \frac{\mu_1}{\mu^*} \right) \frac{t^*}{\sigma} + \left(1 - \frac{\mu^* \cdot \sigma}{\nu_0} \right) \right] \cdot \exp \left(-\frac{t^*}{\sigma} \right) \end{aligned}$$

expression qu'il s'agit de différentier en admettant que μ^* reste constant. Le calcul montre que la dérivée s'annule pour une valeur \hat{t}^* de t^* qui vaut

$$\hat{t}^* = \frac{\nu_0 - \mu_1 \cdot \sigma}{\mu^* - \mu_1}$$

formule qui *définit* donc, pour le gisement considéré, la teneur limite proprement dite, dans les conditions impo-

sées ou supposées ; on remarquera que cette formule rend la définition classique de la limite lorsque $\mu_1 = 0$.

28.17. — L'exemple que nous choisirons est emprunté à un article de TONNEAU [16] et se rapporte à l'or ; l'auteur ne mentionnait cependant pas qu'il s'agissait d'un gisement sensiblement parfait, et d'ailleurs ne parlait même pas des lois de distribution dans ses gisements, son but étant tout autre. Cet exemple ne se rapporte pas à un seul gisement à vrai dire, mais plutôt à toute une famille de gisements, une *réserve*. Par parenthèse, signalons qu'une réserve a plus de chance d'être parfaite que des gisements isolés ; en effet, ceux-ci, lorsqu'on les ajuste par les fonctions III de PEARSON peuvent présenter les uns des p positifs, les autres des p négatifs, et ainsi, sur l'ensemble total, le p moyen a de grandes chances d'être nul.

Du tableau de résultats présentés par l'auteur, nous extrayons les suivants :

$\bar{t}_* - t^*$	t^*	\bar{t}_*	B_*
0,94	0,250	1,19	4.190 .10 ³
0,91	0,375	1,28	4.321
0,92	0,500	1,42	4.400
1,09	0,625	1,71	4.396
1,31	0,750	2,06	4.100

Le prix de revient total (tous niveaux) obéit à la loi

$$v = 18,7 + 1,2 \cdot t^* \text{ fr/m}^3$$

et le cours de l'or est supposé être de 39.000 fr/kg. La grandeur $\bar{t}^* - t^*$ est assez sensiblement constante, comme on le voit, surtout pour les 4 premières valeurs de t^* . Adoptons donc $\bar{t}^* - t^* = 0,96$. En appliquant la dernière formule de 22.16, il vient

$$\hat{t}^* = \frac{18,7 - 1,2 \times 0,96}{39 - 1,2} = 0,47.$$

En fait, le tableau montre que le bénéfice est maximum aux environs de $t^* = 0,50$.

§ 29. La réévaluation des gisements non parfaits.

29.1. — Quel que soit le gisement, on peut s'éviter le mal d'une réévaluation en s'y prenant à temps. Il suffit de procéder, tout de suite après la prospection, à trois évaluations, une à une limite très faible, une autre à la limite en vigueur au moment, une troisième à une limite pas trop forte, mais qui n'a que peu de chances d'être imposée un jour. On dressera alors des graphiques ayant la teneur-limite ou l'accumulation-limite en abscisse, et en ordonnée les variables Q , V , ainsi que d'autres que l'on trouverait intéressantes.

29.2. — On peut aussi concevoir une méthode moins empirique et basée sur l'emploi des graphiques gamma ou des tables de PEARSON. Soit x^* la limite de la variable pearsonienne (rappelons que x ne diffère de l'accumulation a que de l'éventuelle différence entre l'origine du graphique et celle du calque) ; calculons la moyenne du placer limité par x^* . On a, en se remémorant les notations et les formules de 25.6 et 25.7 :

$$\bar{u}_* = \left(\frac{\bar{x}}{k\sigma} \right)_* = \frac{\Gamma_{p+2}}{\Gamma_{p+1}} \int_{u^*}^{\infty} u \cdot (u^p \cdot e^{-u}) du \Big/ \int_{u^*}^{\infty} u^p e^{-u} du$$

avec

$$u = \frac{x}{\sigma} \sqrt{p+1} \quad u^* = \frac{x^*}{\sigma} \sqrt{p+1}$$

Les deux intégrales sont données par nos diagrammes ou par les tables de PEARSON ; l'intégrale du numérateur, qui donne la moyenne, est en effet elle-même une intégrale d'une fonction III, mais de rang $p+1$. Ceci appelle une remarque ; lorsqu'il s'agira de repasser des u aux x , on se rappellera que u est multiple d'un radical où figure le p de la fonction III ; pour le numérateur ce

paramètre est $(p + 1)$ et non p . Dès lors le x^* du numérateur ne sera pas celui du dénominateur mais bien une grandeur x' telle que l'on ait

$$u^* = \frac{x^*}{\sigma} \sqrt{p + 1} = \frac{x'}{\sigma} \sqrt{(p + 1) + 1}$$

Remplaçant maintenant les intégrales par leur notation Ψ , on a, en se souvenant de la relation fondamentale qui relie les intégrales eulériennes Γ , et de la relation qui donne la moyenne \bar{x} de gisement (cfr 26.7)

$$\bar{x}_* = \bar{x} \cdot \frac{\Psi_{p+1}(x')}{\Psi_p(x^*)} \quad \text{avec} \quad x' = x^* \cdot \sqrt{\frac{p + 1}{p + 2}}$$

qui est la formule de réévaluation. Son aspect est peut-être rébarbatif, mais si on la comprend bien, son emploi est plus simple que celui des calculs habituels de réévaluation. Les calculs se font au moyen des graphiques gamma ou de tables.

APPENDICE I : Exemple d'emploi des graphiques gamma.

Les quatre exemples qui vont suivre ont été pris parmi de nombreux autres que nous avons eu l'occasion de traiter. Ils représentent chacun un cas typique :

Ex. 1 : Gisement gaussien (assez rare)

Ex. 2 : Gisement pearsonien, $p > 0$

Ex. 3 : Gisement pearsonien, $p < 0$ (cas facile)

Ex. 4 : Gisement pearsonien, $p < 0$ (cas difficile)

Les graphiques qui accompagnent ces exemples doivent être supposés dessinés sur un papier calque qui aurait été appliqué sur le diagramme muet (appendice II).

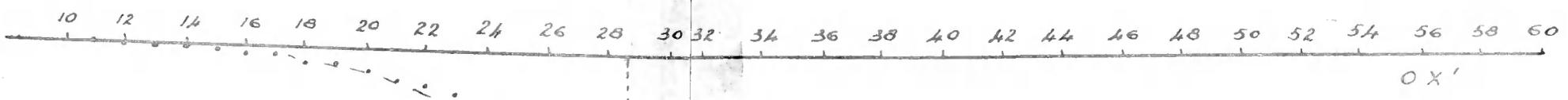
Nous aurions pu présenter ces exemples sous forme de *formulaires d'évaluation* dûment remplis, mais nous avons préféré adopter une forme plus vivante, moins schématique. Nous dirons simplement que tout formulaire d'évaluation doit prévoir des cases pour tous les résultats que l'on trouvera dans les exemples, c'est-à-dire non seulement pour les moyennes, les cubages et les tonnages comme cela se fait habituellement, mais aussi pour les paramètres de dispersion tels que : les paramètres pearsoniens fondamentaux p et σ , le nombre des puits utiles, les écarts décans, médians et improbables ; il ne devra pas oublier non plus des cases pour la formule ou l'hypothèse de payabilité adoptée, et pour les valeurs-limites choisies.

OBELA-I

EXEMPLE I.

a	n	N	Alluvions — Cassitérite — Maille de 100 × 10 — 63 puits.
11	0	63	Dressons le diagramme des log N. Celui-ci apparaît
12	1	63	tout de suite comme sensiblement gaussien ; les deux
13	0	62	puits 58 et 59 sont nettement aberrants (exceptionnels).
14	1	62	L'application sur le diagramme gaussien montre que la
15	1	61	courbe est parfaitement compensée par la courbe gaussien-
16	0	60	ne $\sigma = 4$ unités, c.-à-d. ici = 8 hgr/m ² . La moyenne
17	2	60	se lit immédiatement et vaut 28,6.
18	0	58	Le calcul de la moyenne brute donnait 29,01. Les deux
19	2	58	puits aberrants se ramènent sur la ligne (avec les mêmes
20	2	56	fréquences) si nous les prenons comme valant en réalité
21	1	54	respectivement 43 et 46. Le calcul donne alors une moyen-
22	2	53	ne corrigée de 28,57.
23	3	51	D'après la carte, le gisement apparaît comme assez
24	4	48	homogène et faiblement groupé ; il suffira de prendre
25	2	44	$\gamma^2 = 1,75$ environ, de façon à ramener à 36 le nombre de
26	4	42	puits utiles. Dès lors, on a, pour la dispersion de la moyenne
27	3	38	écart quadratique 4/3
28	4	35	écart décan (10 %) 1/3
29	3	31	écart médian (25 %) 8/9
30	3	28	écart improbable 4
31	2	25	L'unité employée dans le tableau ci-contre était le
32	5	23	0,03 kg. On a donc, comme résultat final, pour l'accumu-
33	4	28	lation moyenne ⁽¹⁾ :
34	2	14	0,86 ± 0,01 (20 %)
35	1	12	0,86 ± 0,03 (50 %)
36	2	11	0,86 ± 0,12 (99 %)
37	2	9	On a donc la certitude pratique que cette moyenne est
38	1	7	comprise entre 0,74 et 0,98 kg/m ² , mais il y a 1 chance sur
39	0	6	2 pour qu'elle soit comprise entre 0,83 et 0,89.
40	2	6	Si le placer présente une surface de l'ordre de 5 Ha,
41	1	4	par ex., on voit que l'écart improbable est de l'ordre
42	1	3	de 6 T, nombre qui peut paraître considérable mais qui
58	1	2	ne représente que 14 % du tonnage moyen à espérer.
59	1	1	
accum. totale :			
			1828

(¹) Il est rappelé que les % entre parenthèses indiquent les chances que possède l'écart de ne pas être dépassé (cfr 26.5).

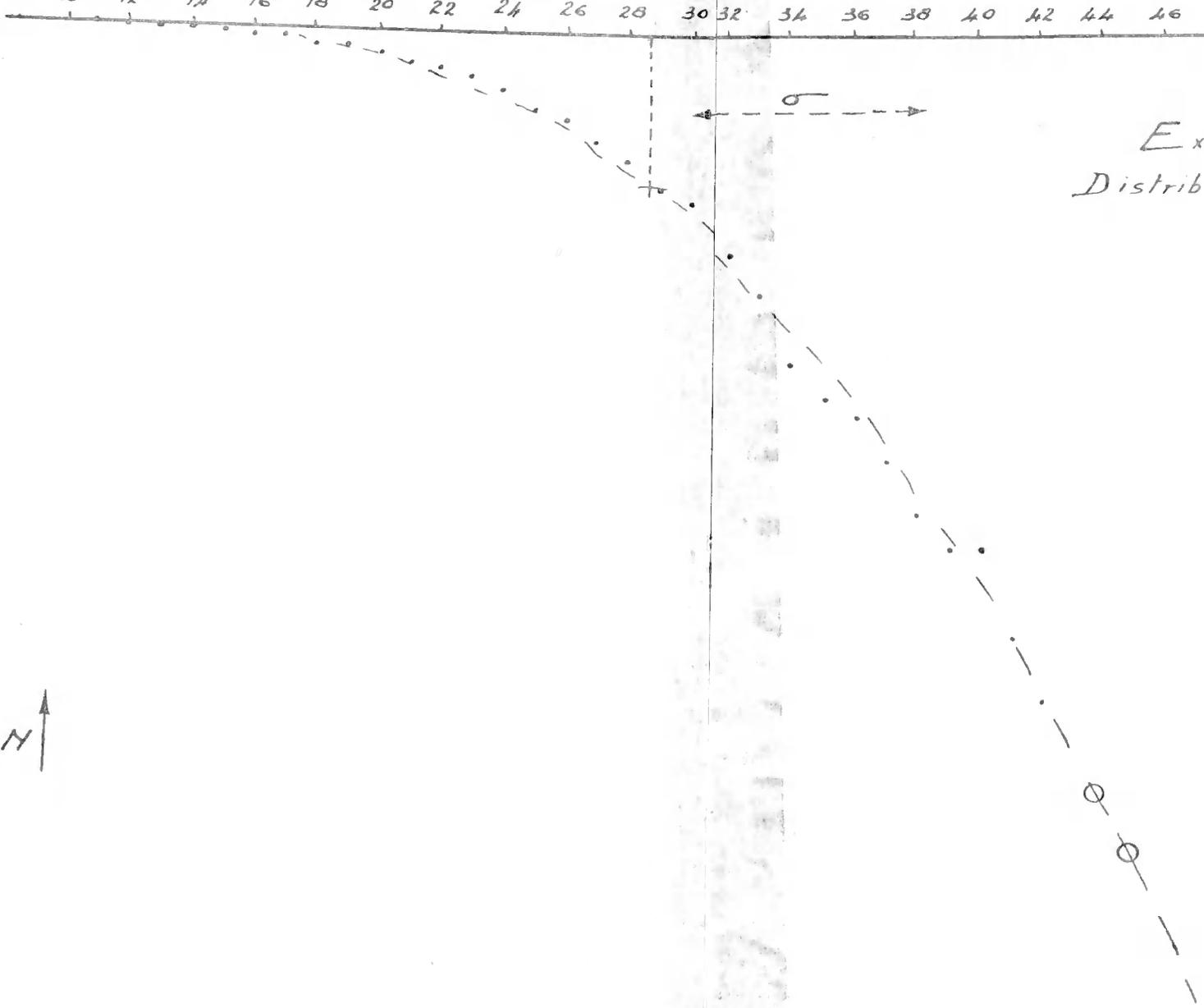


Ex. 1 - Obela I
Distribution de Gauss



lg N ↑

← Valeurs aberrantes



10 15 20 25 30 35 40 45 50 55 60

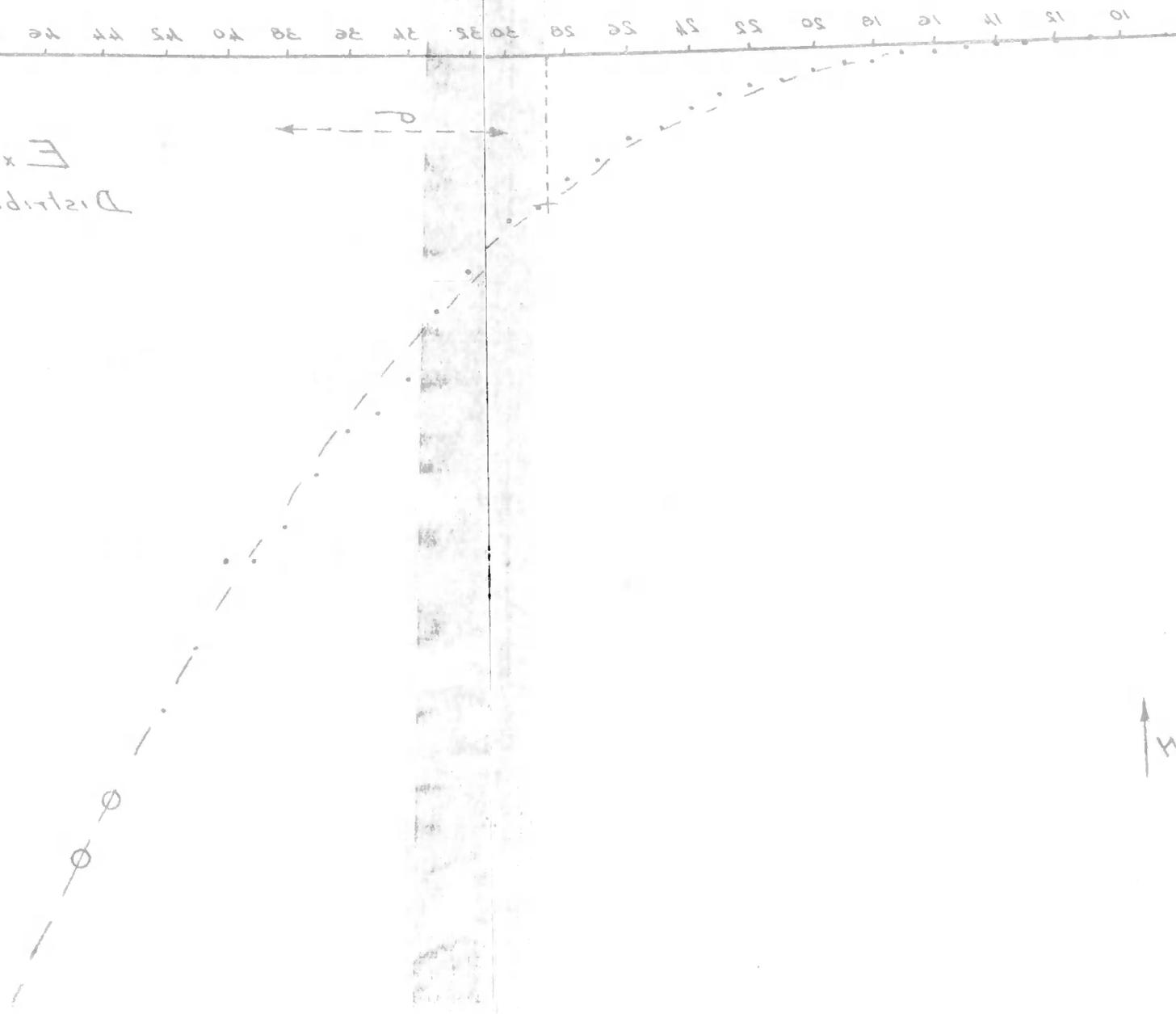
Ox'

Ex. 1. Obela I
Distribution de Gauss

σ

μ

Valours
obertantes



OBETA-II

EXEMPLE 2

a	n	N	Alluvions — Cassitérite — Maille de 10 × 100 — 84 puits.
1	2	84	Le diagramme des log. N montre une courbe du type
2	2	82	$p > 0$ (courbe de dispersion en cloche). A première vue,
3	2	80	il apparaît que, quelle que puisse être la courbe de com-
4	2	78	pensation, les trois derniers puits (les 4 derniers %) de la
5	1	76	liste seront aberrants (exceptionnels).
8	4	75	La ligne obtenue n'est pas très régulière ; cependant,
9	4	71	elle s'ajuste assez bien par la ligne pearsonienne $p = 0.6$
10	2	67	et $\sigma = 4$ unités, soit ici 20 hgr/m ² . Le moyenne lue est 25.
11	6	65	Le calcul de la moyenne brute donnait 25.45. Les puits
12	2	59	aberrants peuvent se corriger en se ramenant à 78 et 88
15	1	57	pour les deux derniers, le troisième pouvant rester égal à
16	2	56	78, l'ajustement étant par ailleurs assez pauvre. Le calcul
18	1	54	montre que la moyenne tombe alors à 24.04 ; la différence
19	3	53	entre cette moyenne calculée et la moyenne mesurée est
20	7	50	donc inférieure à 4 % de celle-ci.
21	4	43	Quant au groupement, il est comparable à celui estimé
22	2	39	à l'exemple 1 (même rivière). En prenant $\gamma^2 = 1.75$ envi-
23	1	37	ron, on voit que le nombre des puits utiles tombe à 48
24	1	36	ou 50. On a ainsi, pour la dispersion de la moyenne :
25	2	35	écart quadratique : $20/7 = 3$ hgr/m ²
27	1	33	» décan 0,7 (10 % chances d'arrivée avec son
28	1	32	» médian 2 (25 % » ») signe)
29	1	31	» improb. 9 (49,8 % » »)
30	1	30	ce qui donne les résultats finals :
31	3	29	2.50 ± 0.07 (20 %) kg/m ²
32	1	26	2.50 ± 0.20 (50 %)
33	2	25	2.50 ± 0.90 (99 %)
34	4	23	On remarquera que l'écart improbable représente ici le
35	2	19	1/3 de la moyenne ; on a cependant 1 chance sur 2 de ne
37	1	17	pas avoir commis plus de 8 % d'erreur sur cette moyenne
38	1	16	(en plus ou en moins) ; mais on n'a que 1 chance sur 5
39	1	15	de commettre 3 ou 4 % d'erreur (en ± ou en —).
40	1	14	Les erreurs relatives sur les tonnages seront naturelle-
41	1	13	ment celles que nous venons d'indiquer pour les accumu-
42	1	12	lations. Mais il peut leur correspondre des erreurs absolues
45	1	11	assez considérables, dont il n'y aurait donc pas lieu
46	1	10	de s'inquiéter dans un cas se présentant aussi bien que
49	1	9	celui-ci.
53	1	8	
56	1	7	
58	2	6	
60	1	4	
78	1	3	
93	1	2	
107	1	1	

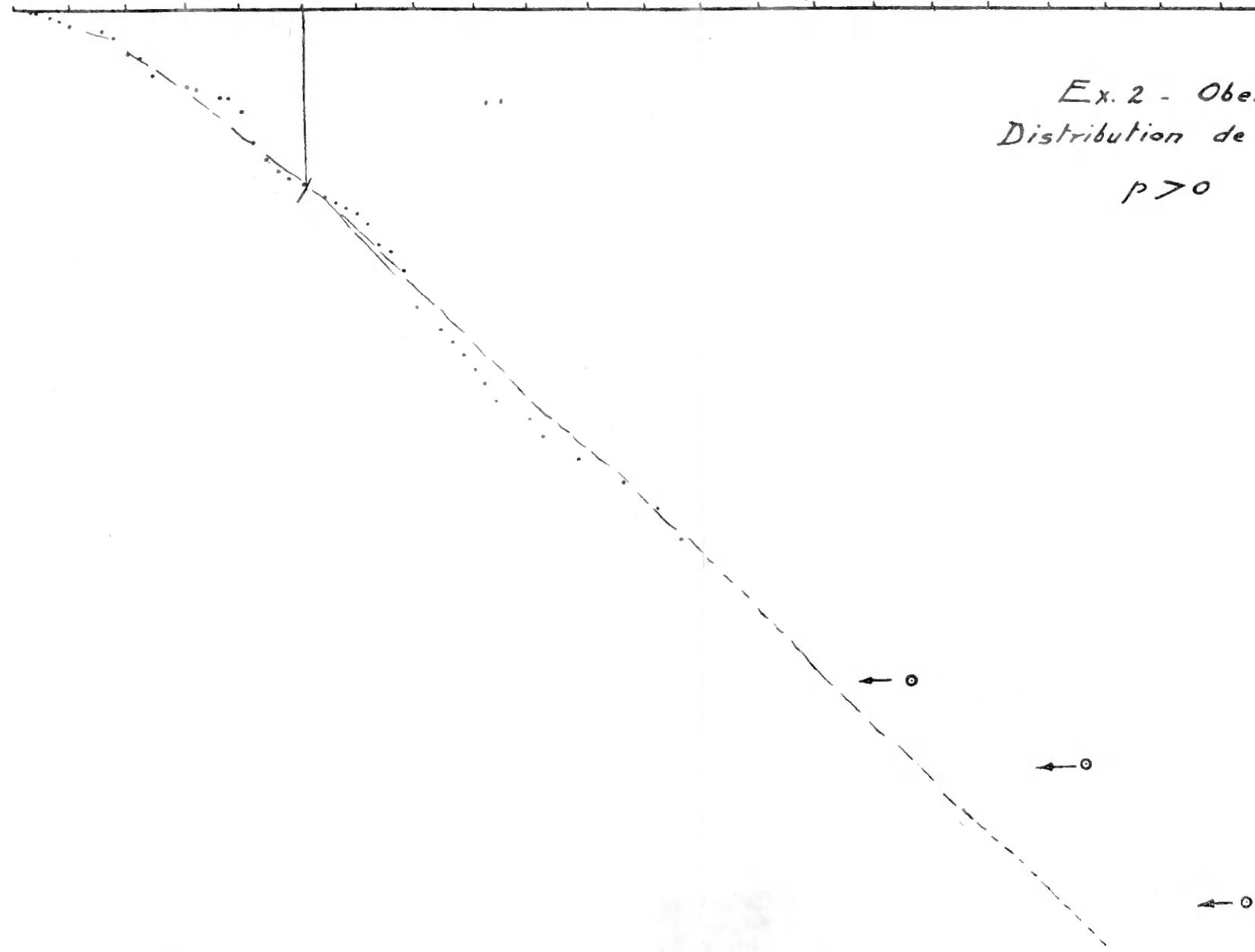
accum. totale :

2141

0 5 10 15 20 25 30 35 40 45 50 55 60 65 70 75 80 85 90 95 100 105 110 115 120

OX'

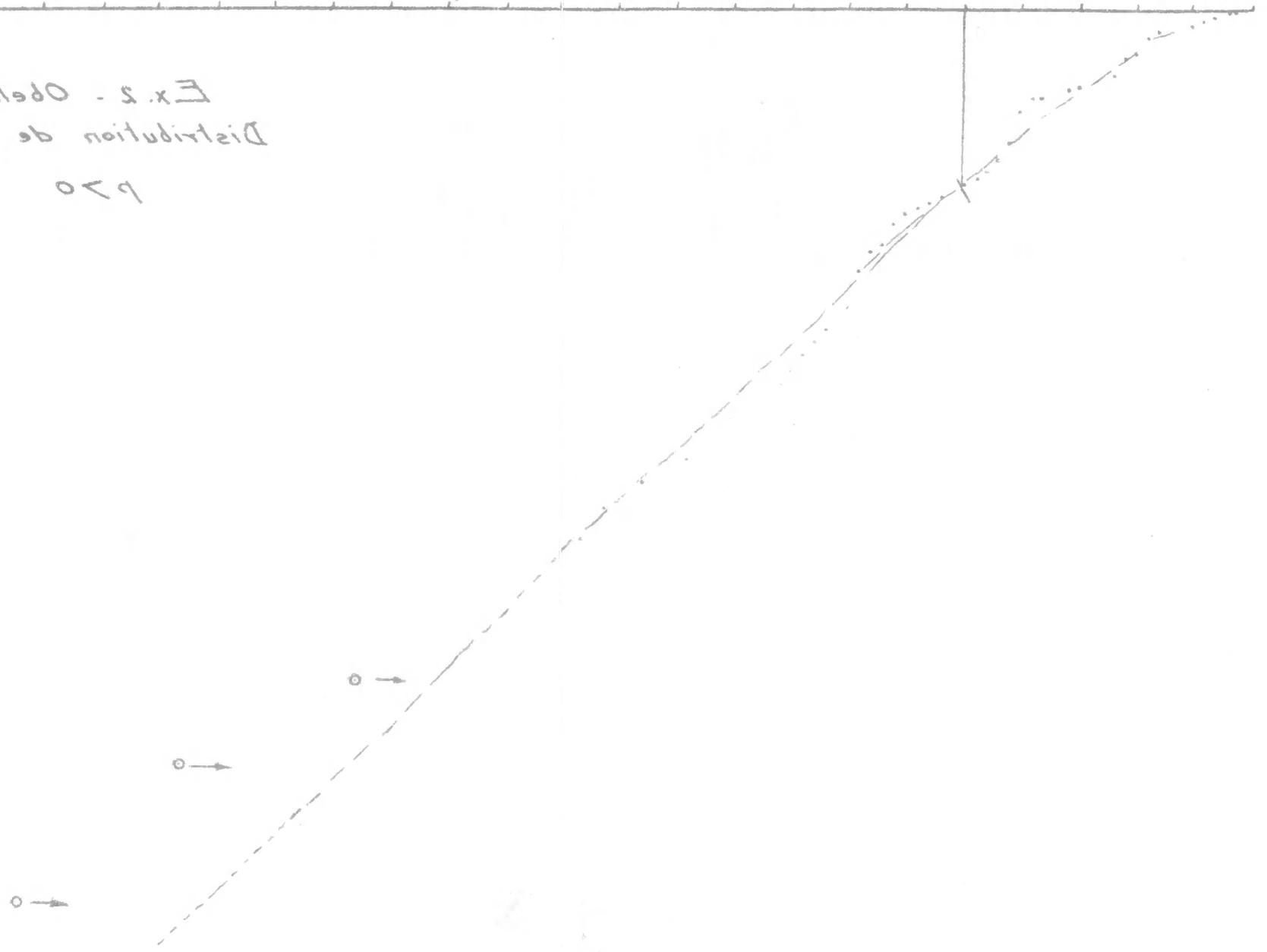
Ex. 2 - Obela. II
Distribution de Pearson
 $p > 0$



0 2 10 12 20 22 30 32 40 42 50 52 60 62 70 72 80 82 90 92 100 102 110 112 120

OX

Ex. 2 - Obel's II
Distribution de Pearson
p > 0



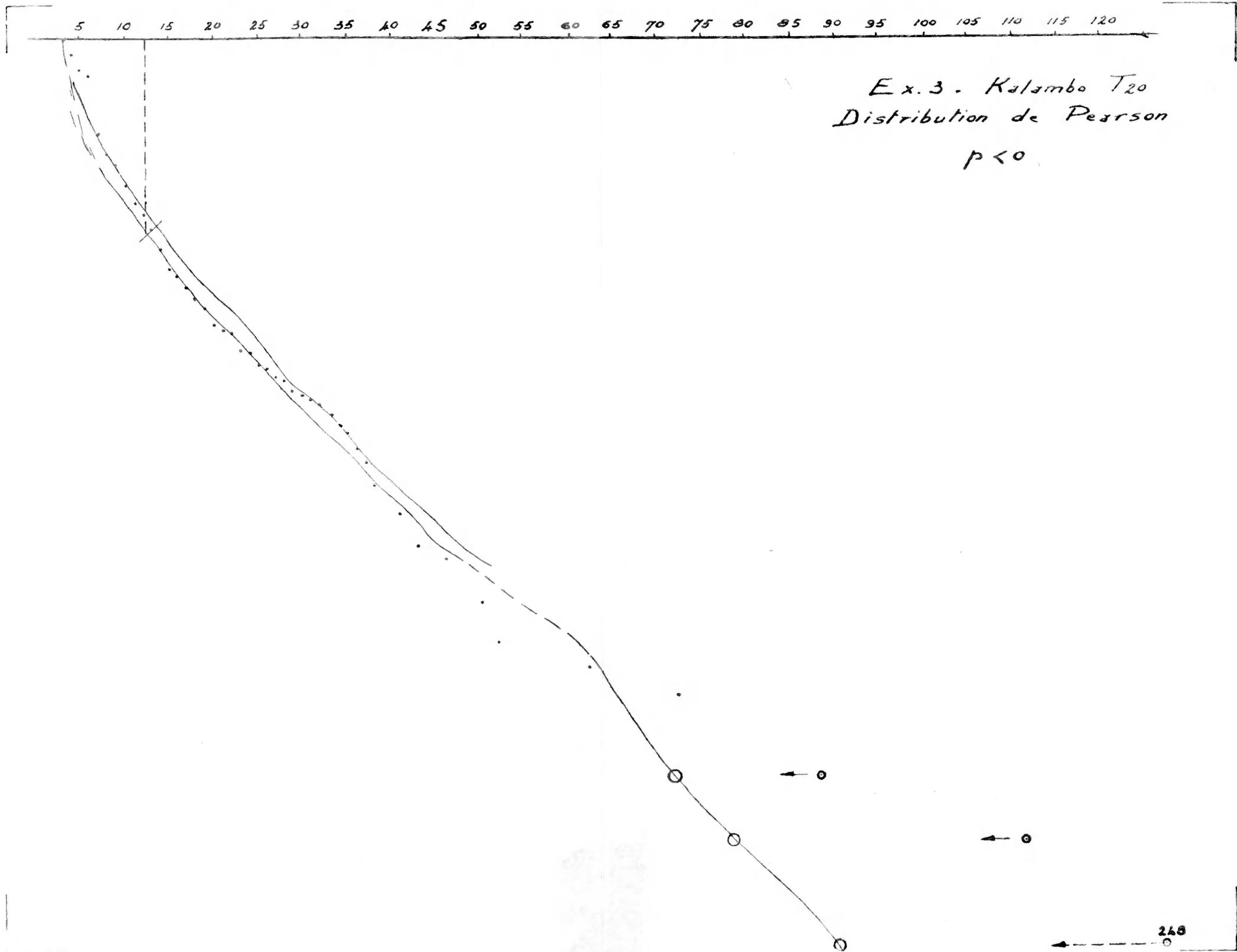
KALAMBO-T 20

EXEMPLE 3

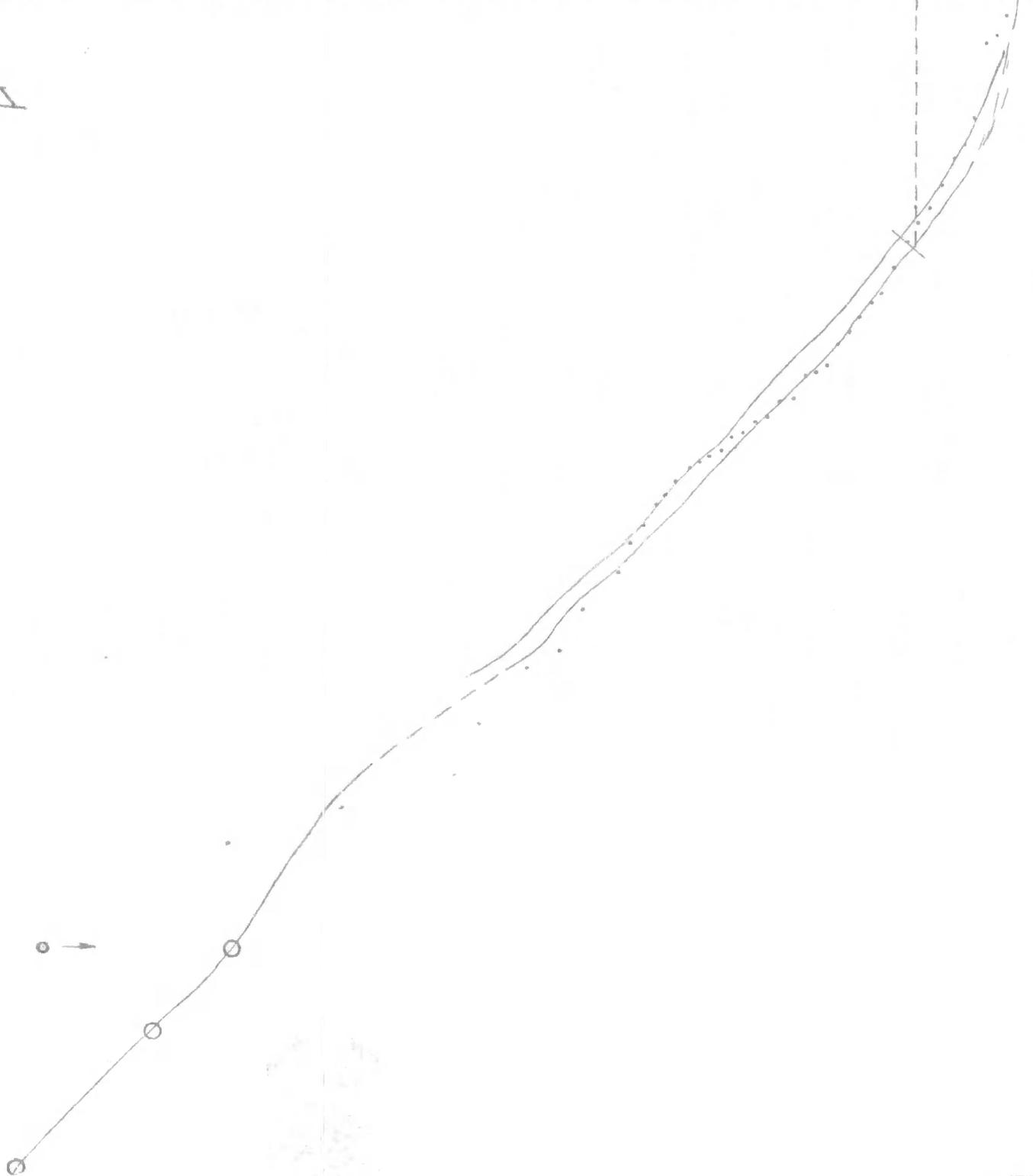
a	n	N	
3	39	324	Terrasses — Cassitérite — Maille de 20×20 — 324 puits.
4	50	285	La ligne de fréquence log N apparaît nettement du
5	21	235	type $p < 0$ (courbe de dispersion en J-renversé). Les
6	35	214	4 % terminaux de la distribution semblent bien s'écarter
7	23	179	de tout modèle de courbe pearsonnienne.
8	8	156	Cette ligne est relativement régulière dans plus de
9	21	148	90 % de son trajet. La compensation de tout ce corps
10	13	127	de statistique se fait d'une façon satisfaisante; celle
11	8	114	des 5 % suivants beaucoup moins. Les 3 derniers puits
12	9	106	sont nettement exceptionnels, apparaissant avec des
13	12	97	fréquences trop fortes; mais les 6 avant-derniers ne
14	10	85	sont pas moins aberrants car leurs fréquences sont trop
15	3	75	faibles (ou leur accumulation trop faible). Ce genre
16	5	72	d'exceptionnalité est évidemment plus rare que celui
17	5	67	habituellement envisagé par les prospecteurs.
18	3	62	L'ajustement est obtenu pour $\sigma = 3$ unités, soit
18	3	62	ici $1,5 \text{ kg/m}^2$, et $p = 0,6$ à $-0,5$.
19	6	59	La moyenne brute est de $1,308 \text{ kg/m}^2$; les 3 derniers
20	2	t3	puits peuvent se ramener à 7,5; 8,0; 9,0. La moyenne
21	1	51	tombe ainsi à 1,24. L'application du calque sur le dia-
22	5	50	gramme gamma montre, sans le moindre calcul, que la
23	1	45	moyenne est de $1,25 \text{ kg/m}^2$, qui ne diffère que de moins
24	3	44	de 1 % de la moyenne (corrigée) calculée.
25	1	41	Le groupement n'étant pas très marqué, on peut se
26	2	40	contenter de $\gamma^2 = 1,5$ environ, ce qui ramène le nombre
27	1	38	de puits utiles à 15^2 environ. La dispersion de la moyenne
28	2	37	se caractérise par :
29	1	35	écart quadratique 0,1
31	3	33	écart décim 0,03
31	1	33	écart médian 0,06
32	2	32	écart improbable 0,3
33	2	30	Si la surface est de 13 Ha, on a ainsi le tonnage
34	1	28	162 ± 4 tonnes (20 %)
35	3	27	162 ± 8 tonnes (50 %)
36	2	24	162 ± 39 » (99 %)
37	3	22	Bien que l'erreur absolue de tonnage paraisse forte,
38	3	19	il ne faut pas oublier que l'erreur maximum à craindre
41	3	16	n'est que de 25 % et l'erreur médiane de 5 %.
43	1	13	On remarquera que, dans cet exemple, on a éliminé
46	3	12	tous les puits non payants (teneur limite $0,4 \text{ kg/m}^3$,
46	3	12	hauteur moyenne 0,70 cm au gravier). Si le travail de
50	2	9	délimitation avait été fait selon les règles exposées en 21-8,
52	1	7	il faudrait ajouter le tonnage (pour mémoire) de la bande
62	1	6	de sécurité. Si le gisement (terrasse) est carré, on voit
72	2	5	de suite que cette bande comptera 76 mailles, soit
88	1	3	3 Ha, et le tonnage marginal environ 8 tonnes, soit de
111	1	2	l'ordre de l'écart médian. Ce tonnage marginal ne peut
248	1	2	donc être négligé.

accum. totale :

4237



Ex. 3. Kalambo Tso
 Distribution de Pearson
 $p < 0$





BARWAME

EXEMPLE 4

a	n	N	Eluvions-Cassitérite — Maille de 40 × 40 — 20 puits.
2	1	20	Il s'agit ici d'un cas extrêmement difficile d'évaluation ; l'ingénieur chargé de la prospection n'avait à l'époque remis ses résultats que sous les plus grandes réserves. La ligne des log N apparaît irrégulière dès son début ; les 4 derniers puits sont nettements aberrants, c.-à-d. les 20 % terminaux de la distribution, ce qui constitue une circonstance très désavantageuse. L'ajustement se fait plus ou moins bien pour les premiers 80 % avec $p = -0,1$ et $\sigma = 50 \text{ hg/m}^2$, ce qui donne une moyenne de 48 hg/m^2 , contre une moyenne brute calculée de 65,6. Si l'on réduit les 4 derniers puits de façon à les ramener sur la courbe compensatrice, on trouve une moyenne réduite calculée de 43, qui est donc de 10 % plus faible que la moyenne donnée par le procédé graphique. La différence est ici plus considérable que dans les exemples précédents ; elle est cependant minime en comparaison de la différence avec la moyenne brute initiale. Un calcul complet donne un écart quadratique brut initial de 150, valant donc plus du double de la moyenne. Ceci donne un écart quadratique de 33 pour la moyenne brute, soit donc la moitié de celle-ci. La moyenne brute n'est certainement pas efficace et on ne peut rien dire de sa dispersion.
4	1	19	
5	1	18	
6	1	17	
8	1	16	
14	1	15	
17	1	14	
18	1	13	
21	1	12	
30	1	11	
31	1	10	
33	1	9	
45	1	8	
56	1	7	
61	1	6	
66	1	5	
145	1	4	
179	1	3	
200	1	2	
679	1	1	
accum. totale :			
1620			

Le calcul de l'écart quadratique corrigé donne 40, différent de 20 % de l'écart graphique ; cette différence est due au mauvais ajustement de la courbe, dû lui-même à la petitesse du nombre des puits du placer. L'écart de la moyenne réduite est ainsi de 9 (par le calcul) ou de 11 (par le graphique) soit donc le 1/4 de la moyenne corrigée. Ainsi donc, même après la correction, on ne devra pas s'attendre à une moyenne très représentative.

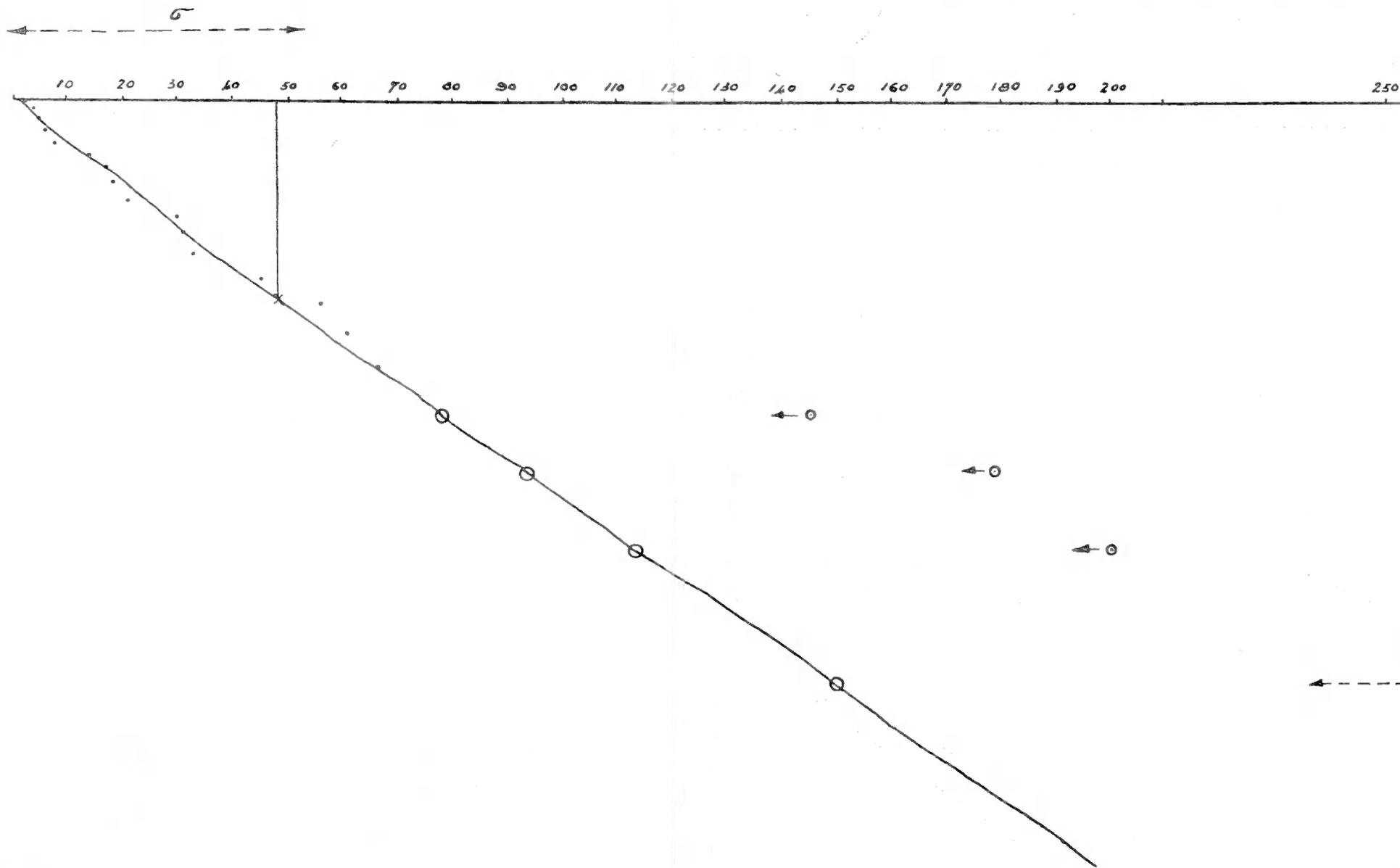
Nous n'avons pas encore parlé de l'effet de groupement, qui, justement doit être ici assez important, d'après la carte. Il n'est pas exagéré de dire que le nombre de puits utiles ne dépasse pas 9, ce qui fait que l'écart improbable est de l'ordre de grandeur de la moyenne ! On devrait donc écrire, comme résultat final quant à la moyenne :

$$\begin{aligned}
 &4,5 \pm 0,4 \text{ kg/m}^2 \text{ (20 \%)} \\
 &4,5 \pm 1,0 \text{ (50 \%)} \\
 &4,5 \pm 4,5 \text{ (99 \%)}
 \end{aligned}$$

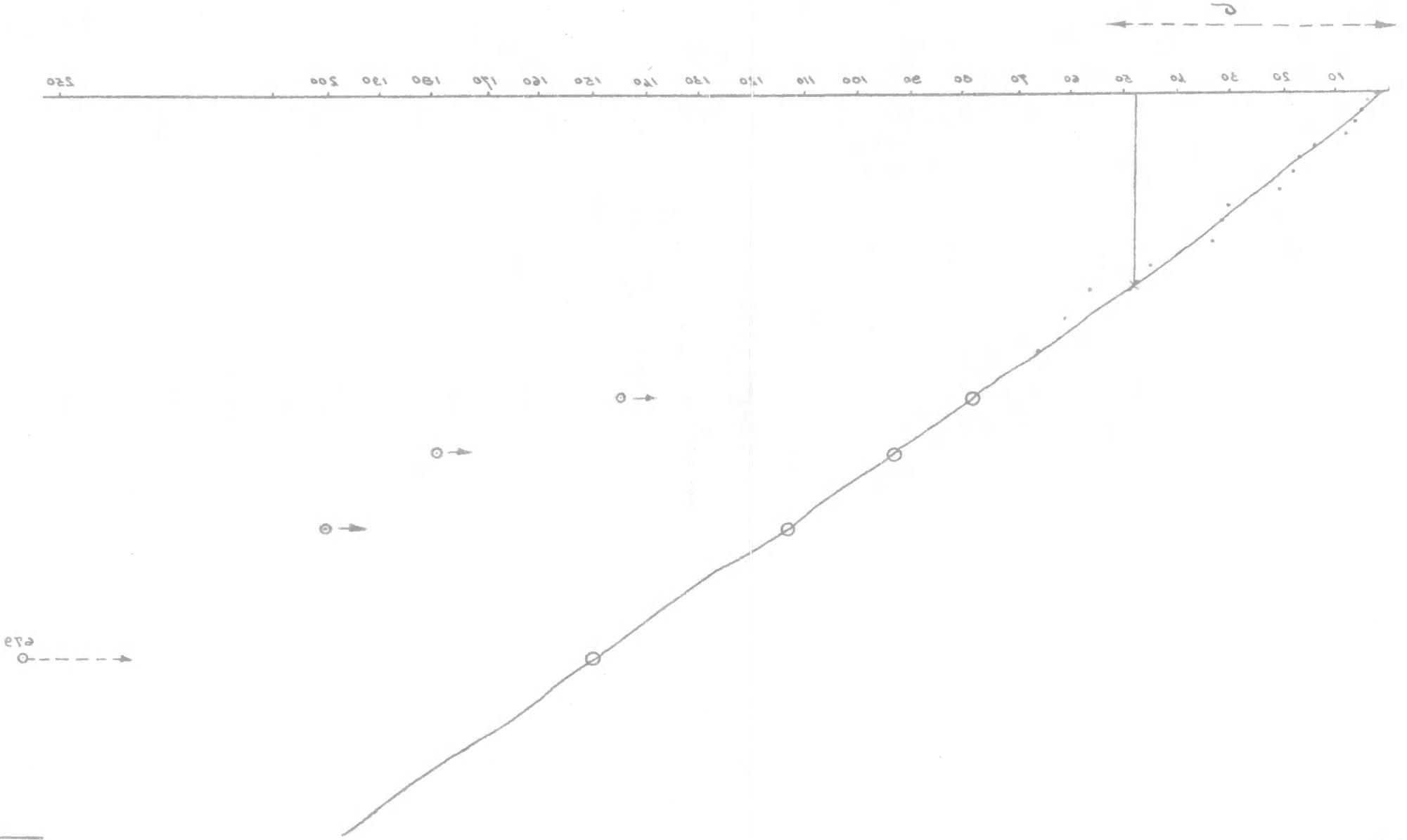
résultats que le prospecteur ne pourra jamais déceimment remettre à la division d'exploitation !

Il est donc bien évident que la maille a été choisie beaucoup trop grande et qu'il y a lieu de creuser tout au moins un puits supplémentaire au centre de chaque maille.

Ex. 4. Bakwamie
Distribution douteuse
(nombre de puits insuffisant)



Ex. 4. Bakwamie
Distribution double
(nombre de puits insuffisant)



APPENDICE II: Exemple de batterie de graphiques gamma.

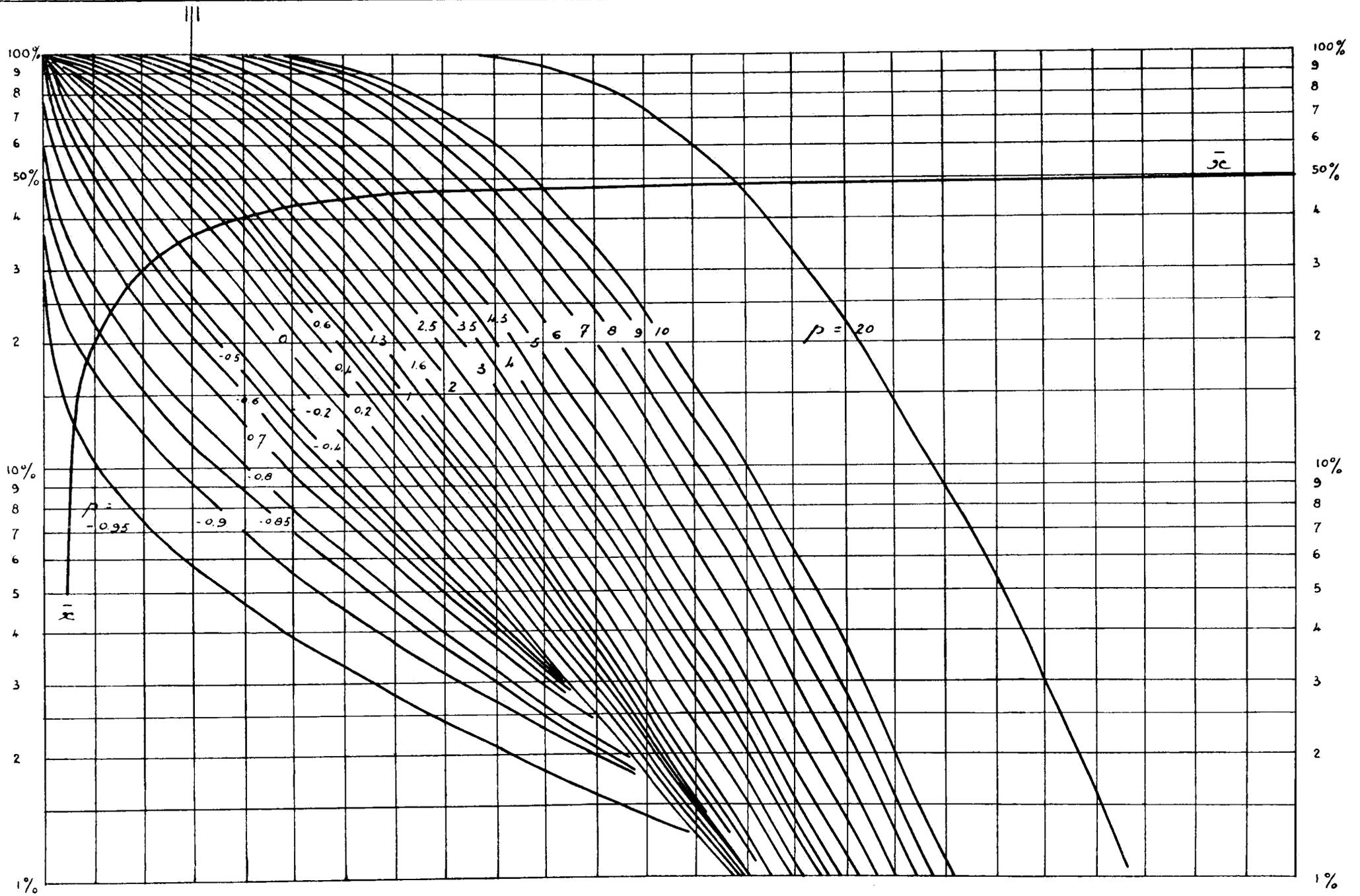
On trouvera ci-après 4 graphiques gamma prêts à l'usage pratique immédiat ; il ne s'agira là que d'une batterie très élémentaire, où σ prend les valeurs 3, 3.5, 4, 5. Cette petite batterie peut cependant suffire, si on veut ; on remarquera en effet que par des changements appropriés d'échelle *de calque*, on peut traiter tous les problèmes où σ vaudrait

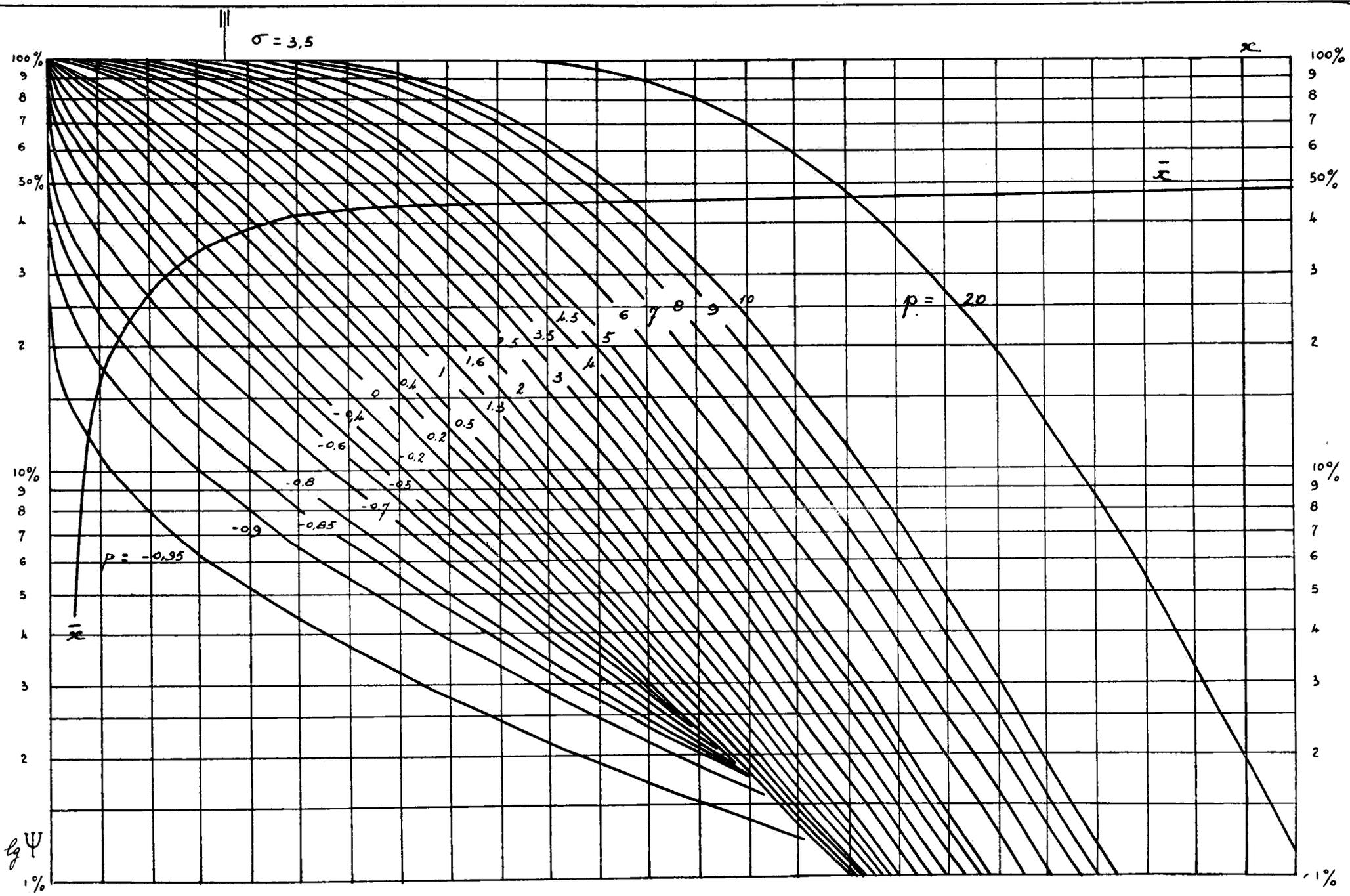
1, 1.5, 2, 2.5, 3, 3.5, 4, 4.5, 5, 6, 7, 8, 9, 10 ;

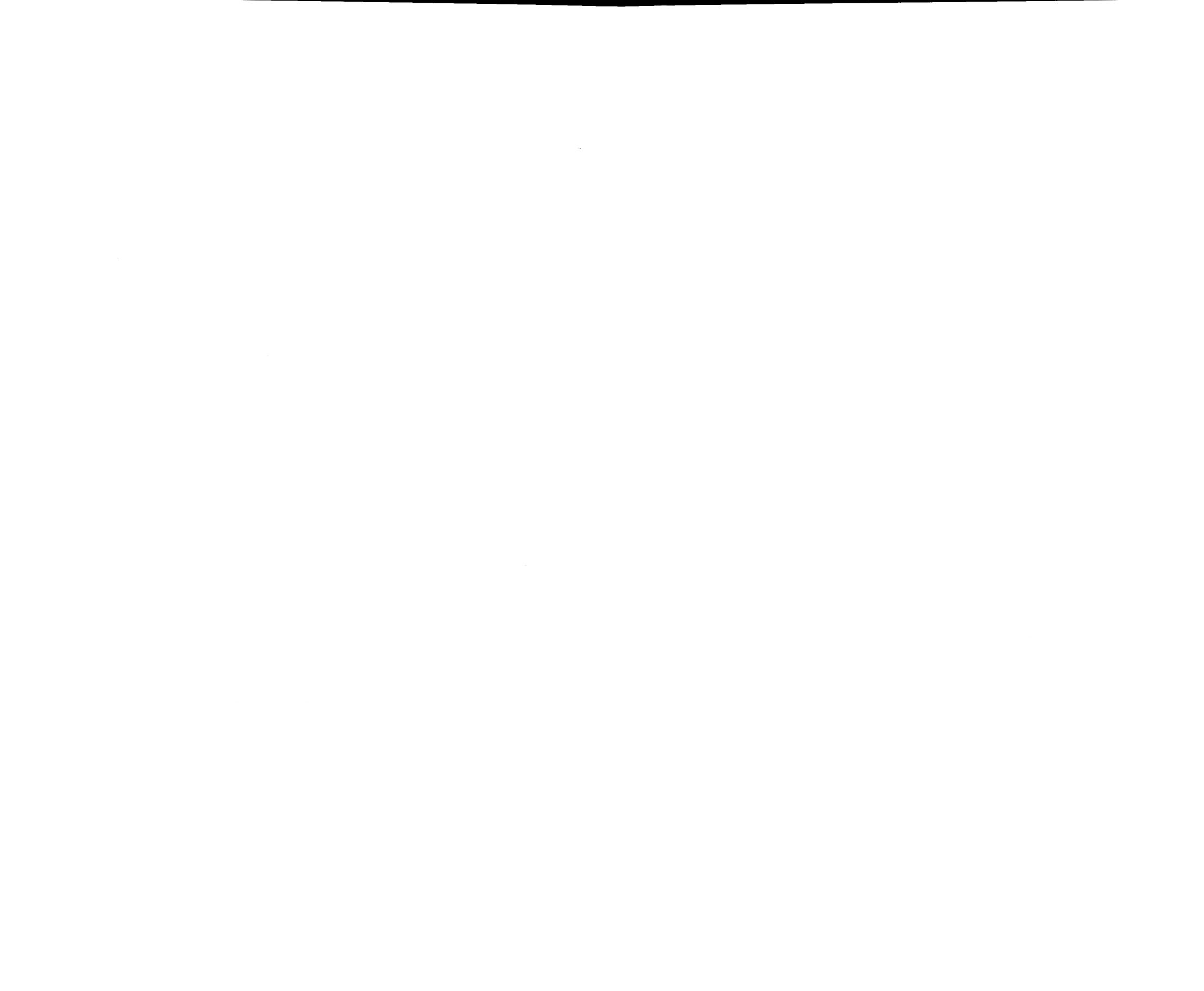
et cette suite peut encore être prolongée : 12, 14, 15, etc mais ceci ne s'avérera jamais nécessaire. La suite ci-dessus a été constituée par des changements *simples* d'échelle : multiplication ou division par 2 ou 3 ; il va de soi que si l'on veut adopter des échelles plus compliquées, tout devient possible (mais peu pratique !).

Après les 4 graphiques de la batterie, on trouvera un *diagramme muet* devant servir de trame ou de canevas pour les calques que l'on voudrait dresser à propos de l'un ou l'autre problème pratique.

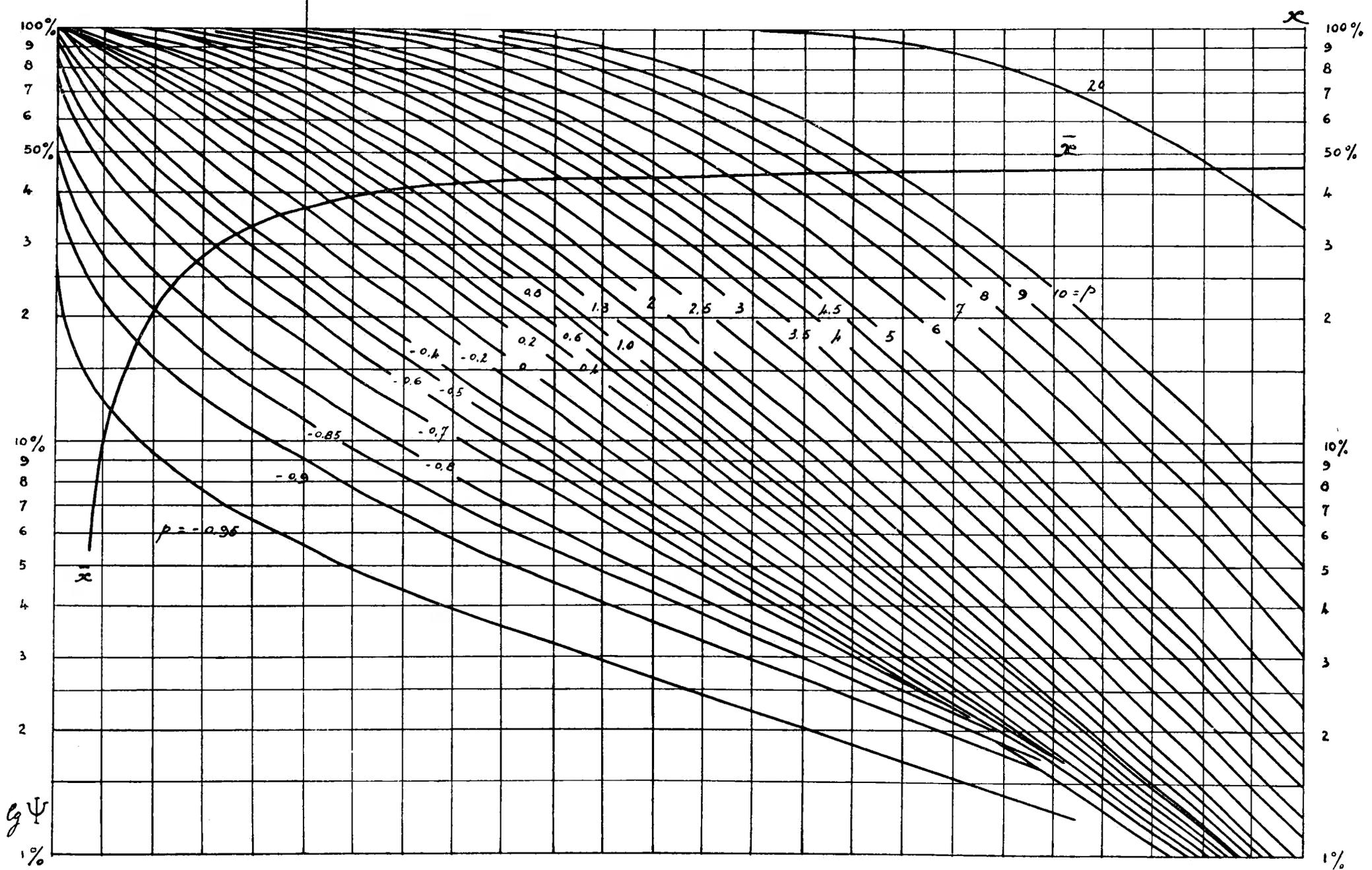
$\sigma = 3$

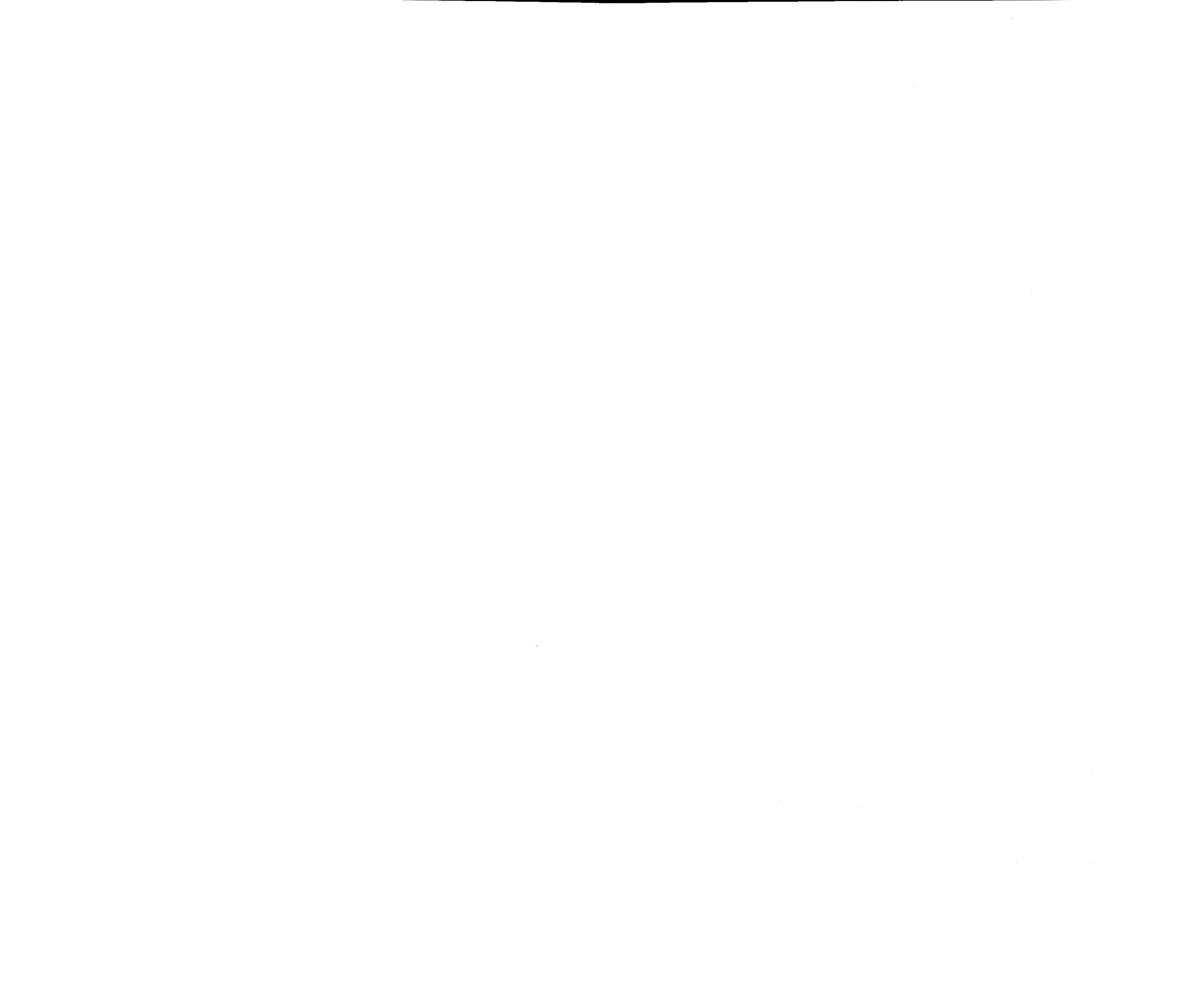


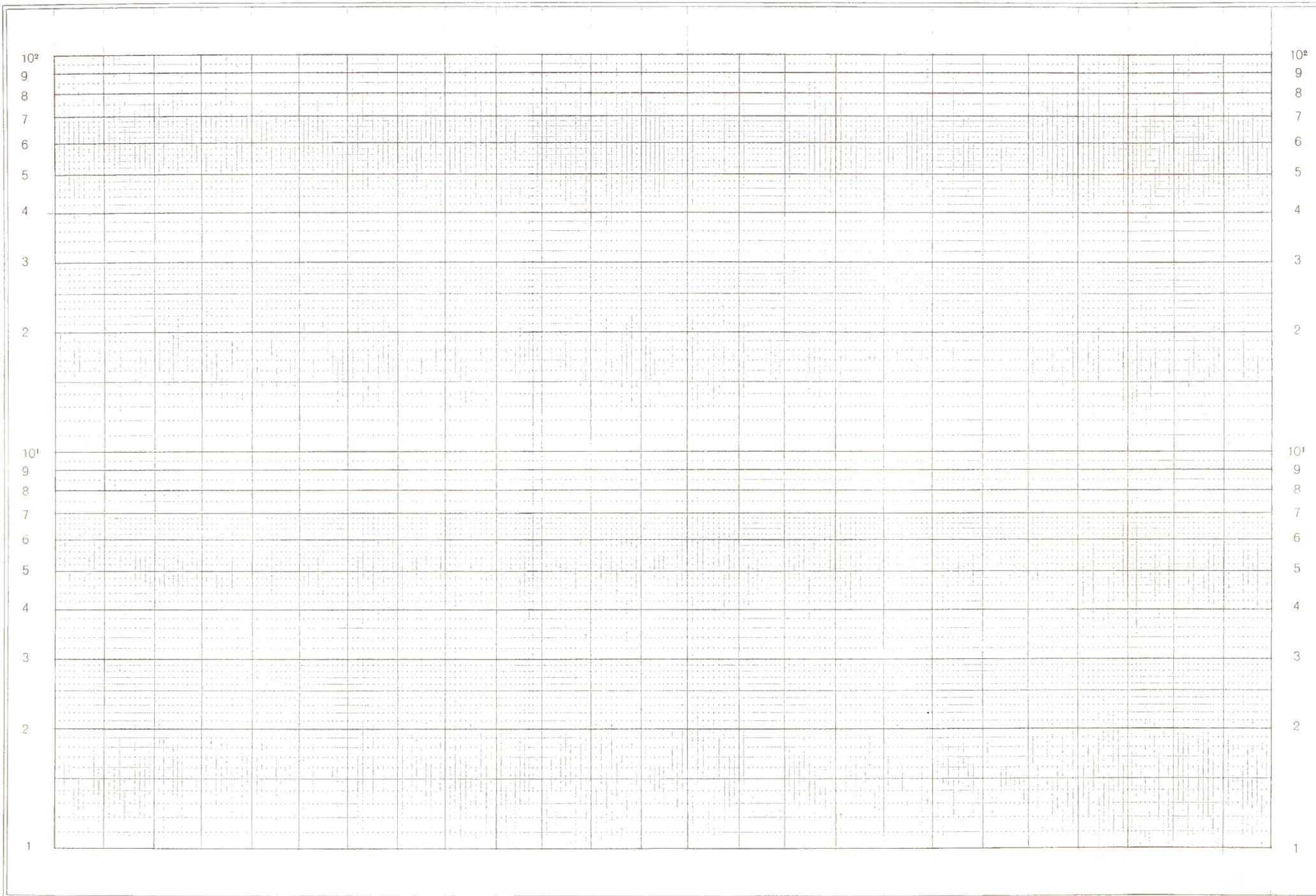




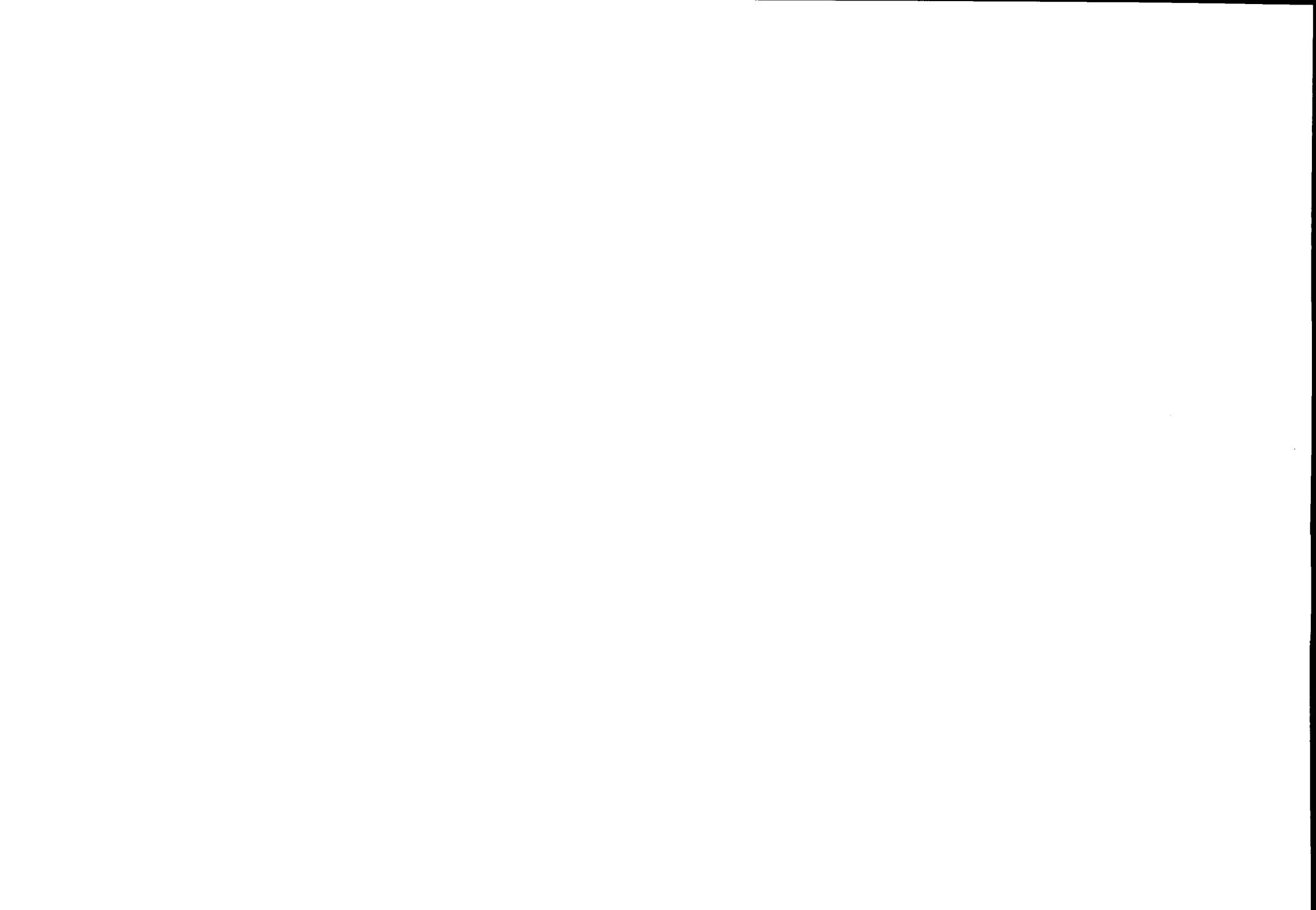
$\sigma = 5$







Logar. Teilung } 1 - 100, Einheit } 83,33 mm
Division } Unité }



BIBLIOGRAPHIE

- [1] M. G. KENDALL, The advanced theory of statistics, 2 vol. (Griffin & Cy, London, 1947).
- [2] M. G. KENDALL & YULE, An introduction to the theory of statistics (Griffin & Cy, London, 1947).
- [3] L. GOOSSENS, Introduction à la statistique mathématique (Revue *Rayonne*, S. E. A. R. Anderlecht-Brux., 1948-...).
- [4] BOREL & DELTEIL, Probabilités. Erreurs (Collection A. Collin, Paris).
- [5] S. J. TRUSCOTT, Mine Economics (*Mining Publications*, London, 1947).
- [6] X., Guide pratique... prospections aurifères (Desoer, Liège).
- [7] J. DEMELENNE, Surestimation systématique de la teneur des zones payantes (*Bulletin du Service Géologique du Congo Belge* n° 2, fasc. II de 1946).
- [8] V. BATY, Statistical estimation of mineral deposits (*The Mining Magazine*, London, July 1948).
- [9] R. T. HANCOCK, Average alluvial samples (*The Mining Magazine*, London, Nov., 1948).
- [10] V. BATY, Les méthodes d'évaluation des gîtes minéraux (*Bulletin de l'A. I. Lg.*, Liège, 1949).
- [11] VERHOOGEN, Statistique de la répartition de l'or dans un gisement éluvionnaire (*Bull. de la Société Géologique Belge*, 1946).
- [12] G. DARMOIS, Statistique et applications (Collections A. Collin, Paris).
- [13] J. DEMELENNE, Les méthodes de prospection et la statistique mathématique.
- [14] P. V. DUHOUX, La recherche de l'or au Congo belge.
- [15] L. PREUD'HOMME, La prospection et l'évaluation des gisements aurifères à la M. G. L.
- [16] R. TONNEAU, Contribution... à l'étude économique d'une exploitation minière.
- [13] à [16] : Extraits de la brochure du Centenaire de l'A. I. Lg. — Congrès 1947 Section Coloniale. (Éditions A. I. Lg., Liège).

TABLE DES MATIÈRES

PRÉFACE	3
AVANT-PROPOS	9
<i>Chapitre-Introduction: LE GISEMENT ET SON ÉVALUA-</i> <i>TION</i>	13
1. — Les ségrégations.....	13
2. — Le problème de l'évaluation	16

PREMIÈRE PARTIE

DES VARIABLES ET DES FONCTIONS UTILISÉES

3. — Sommaire	19
<i>Chapitre I^{er}: VARIABLES ET FONCTIONS TECHNIQUES</i>	20
4. — Sommaire	20
5. — Variables et fonctions de volume	20
6. — Variables et fonctions de tonnage	24
7. — Variables et fonctions mixtes	28
8. — Fiches et cartes de placers	31
<i>Chapitre II: VARIABLES ET FONCTIONS ÉCONOMIQUES</i>	34
9. — Sommaire	34
10. — Théorie du bénéfice simple	35
11. — Théorie du bénéfice maximum	44
<i>Chapitre III: LES ERREURS DE PROSPECTION</i>	57
12. — Sommaire	57
13. — Éléments de la théorie des erreurs	58
14. — Les erreurs de prospection. Cas du lavage total	68
15. — Les erreurs de prospection. Cas du lavage partiel	72
16. — Les erreurs de prospection sur tout le gisement	78

SECONDE PARTIE

LE PROBLÈME DE L'ÉVALUATION ET SA SOLUTION

17. — Sommaire	80
<i>Chapitre IV</i> : APERÇU GÉNÉRAL DU PROBLÈME	82
18. — Sommaire	82
19. — La population des puits et son échantillonnage	84
20. — Les distributions	92
21. — La payabilité et la délimitation des placers	100
22. — La « pondération » des fréquences	106
23. — Le contrôle de la prospection par l'exploitation	108
<i>Chapitre V</i> : ÉVALUATION PAR LES FONCTIONS GAMMA INCOMPLÈTES ET PAR LES GRAPHIQUES GAMMA	110
24. — Sommaire	110
25. — Les fonctions III de PEARSON et les fonctions gamma incomplètes	110
26. — L'évaluation par les graphiques gamma	122
<i>Chapitre VI</i> : LA RÉÉVALUATION ET LE GISEMENT PARFAIT	129
27. — Sommaire	129
28. — Le gisement parfait	130
29. — La réévaluation des gisements non parfaits	140
APPENDICE I : Exemples d'emploi des graphiques gamma	143
APPENDICE II : Exemple de batterie de graphiques gamma	152
BIBLIOGRAPHIE	153
TABLE DES MATIÈRES	155
