

Académie royale des Sciences d'Outre-Mer
Classe des Sciences Techniques, N.S. XVIII-1, Bruxelles 1974

LE GISEMENT DE BUKENA

Un cas particulier d'estimation des réserves

PAR

G. PANOU

Laboratoire de Géologie appliquée de l'U.L.B.

350 F

Koninklijke Academie voor Overzeese Wetenschappen
Klasse voor Technische Wetenschappen, N.R. XVIII-1, Brussel 1974



Académie royale des Sciences d'Outre-Mer
Classe des Sciences Techniques, N.S. XVIII-1, Bruxelles 1974

LE GISEMENT DE BUKENA

Un cas particulier d'estimation des réserves

PAR

G. PANOU

Laboratoire de Géologie appliquée de l'U.L.B.

Koninklijke Academie voor Overzeese Wetenschappen
Klasse voor Technische Wetenschappen, N.R. XVIII-1, Brussel 1974

Mémoire présenté à la Séance du 25 mai 1973
Rapporteurs: MM. P. EVRARD, A. ROLLET et I. de MAGNÉE

D/1974/0149/11

RESUME

Le gisement détritique d'étain de Bukena est situé au Nord du Katanga. Il s'agit d'un gisement petit et pauvre. Il a été prospecté et partiellement exploité jusqu'à la fin septembre 1960. La partie non exploitée ne justifie pas une nouvelle campagne de prospection. Il faut donc se contenter des données des prospections anciennes. Les différentes méthodes connues d'évaluation des réserves sont passées en revue et appliquées. Chaque fois que cela est possible, les chiffres de ces évaluations sont comparés aux résultats de l'exploitation.

SAMENVATTING

De tinmijn van Bukena is gelegen in het Noorden van Katanga. Het betreft een kleine en arme mijn. Ze werd geprospecteerd en gedeeltelijk ontgonnen tot op einde september 1960. Het nog niet ontgonnen deel wettigt geen nieuwe prospectie. Men moet zich dus tevreden stellen met de resultaten van het oude onderzoek. De verschillende gekende methodes voor het schatten van de reserves worden onderzocht en toegepast. Telkens dit mogelijk is, worden de bekomen cijfers vergeleken met de resultaten van de uitbating.

I. BUKENA

Le poste minier de Bukena est situé à 10 km au sud de la route Mitwaba-Manono, à 70 km environ de cette dernière localité. Il a été rendu célèbre après la publication, par A. ROLLET [64] (1), de la description de sa centrale géothermique. Les auteurs qui citent cette réalisation unique au monde, ignorent probablement souvent qu'elle est l'expression la plus spectaculaire de l'immense effort accompli pour exploiter ce gisement.

Bukena est un gisement pauvre et relativement petit de cassitérite et columbotantalite. Il est situé dans une région pauvre en eau, loin des grandes voies de transport et des sources traditionnelles d'énergie. Il aurait dû normalement constituer un simple gîte ou « réserve potentielle » de minerai. Pourtant des mineurs, pleins d'enthousiasme et d'imagination, ont osé exploiter Bukena. L'histoire passionnante de cette aventure vaut d'être contée; nous résisterons à la tentation, car les archives de la société SERMIKAT contenaient une ébauche de ce travail [65] et nous voulons espérer que Monsieur ROLLET, qui connaît si bien Bukena, voudra bien un jour publier cet historique. Nous nous contenterons donc d'indiquer quelques éléments indispensables à la compréhension de notre travail.

Bukena est un gisement détritique. Les sables et graviers reposent sur un bed rock granitique d'âge kibarien [10]. La cassitérite fine est accompagnée de columbotantalite. L'étude de la corrélation entre les teneurs en ces deux minéraux conduit à des conclusions d'un certain intérêt. Toutefois, pour ne pas trop allonger le texte, nous nous limiterons dans cette note à la seule cassitérite.

La prospection par puits à la maille de 100 m couvre la majeure partie du gisement et les zones les plus prometteuses ont été prospectées à la maille de 50 m et souvent de 25 m. Les tra-

(1) Les chiffres entre [] se réfèrent à la bibliographie in fine.

vaux de prospection ont été menés avec beaucoup de sérieux. En particulier, le contenu entier des puits était échantillonné et, pour éviter toute différence entre « teneur de prospection » et « teneur récupérable », on a installé très tôt une laverie miniature qui reproduisait le rhéogramme des chantiers. Le calcul des réserves [69] est, compte tenu des connaissances de l'époque, un modèle du genre et notre note est un hommage que nous rendons aux prospecteurs de Bukena.

Après 1954, les puits de prospections étaient souvent arrêtés à 1,5 m de profondeur, car la tranche supérieure est la plus riche. Dans un travail récent, consacré à l'estimation des réserves de Bukena [52], on trouve une critique de cette habitude. C'est ignorer complètement la réalité de Bukena. S'il est vrai que les puits étaient souvent arrêtés à 1,5 m, il est tout aussi vrai que la teneur de la tranche inférieure était assez systématiquement déterminée (1). En outre, les agents de chantier ne manquaient jamais de vérifier la teneur du minerai abandonné. Les archives de la SERMIKAT contiennent de nombreux schémas et notes, qui complètent utilement les chiffres contenus dans les tableaux récapitulatifs.

Nous avons soigneusement rassemblé ces données, afin de reconstituer une image aussi fidèle que possible de la reconnaissance du gisement.

La fig. 1 résume ces données et sur la fig. 2 nous avons tracé les zones d'influence des puits, groupées en quatre catégories de teneurs. Nous avons adopté la définition usuelle de la zone d'influence et avons attribué à chaque zone la teneur du puits central; nous étudierons au paragraphe 6.1.3 l'erreur commise lors de cette extension. Signalons déjà que nous adopterons à partir de 6.1.4 une autre définition de la zone d'influence qui imposera dans certaines régions du gisement un découpage différent de celui représenté à la figure 2.

Bien que les figures 1 et 2 ne soient pas superposables (2), on y distingue clairement 3 zones riches:

(1) L'auteur de la présente écrit en connaissance de cause. Il a participé à la campagne de prospection de 1960.

(2) Ce qui montre bien que la profondeur des puits est loin d'être constante.

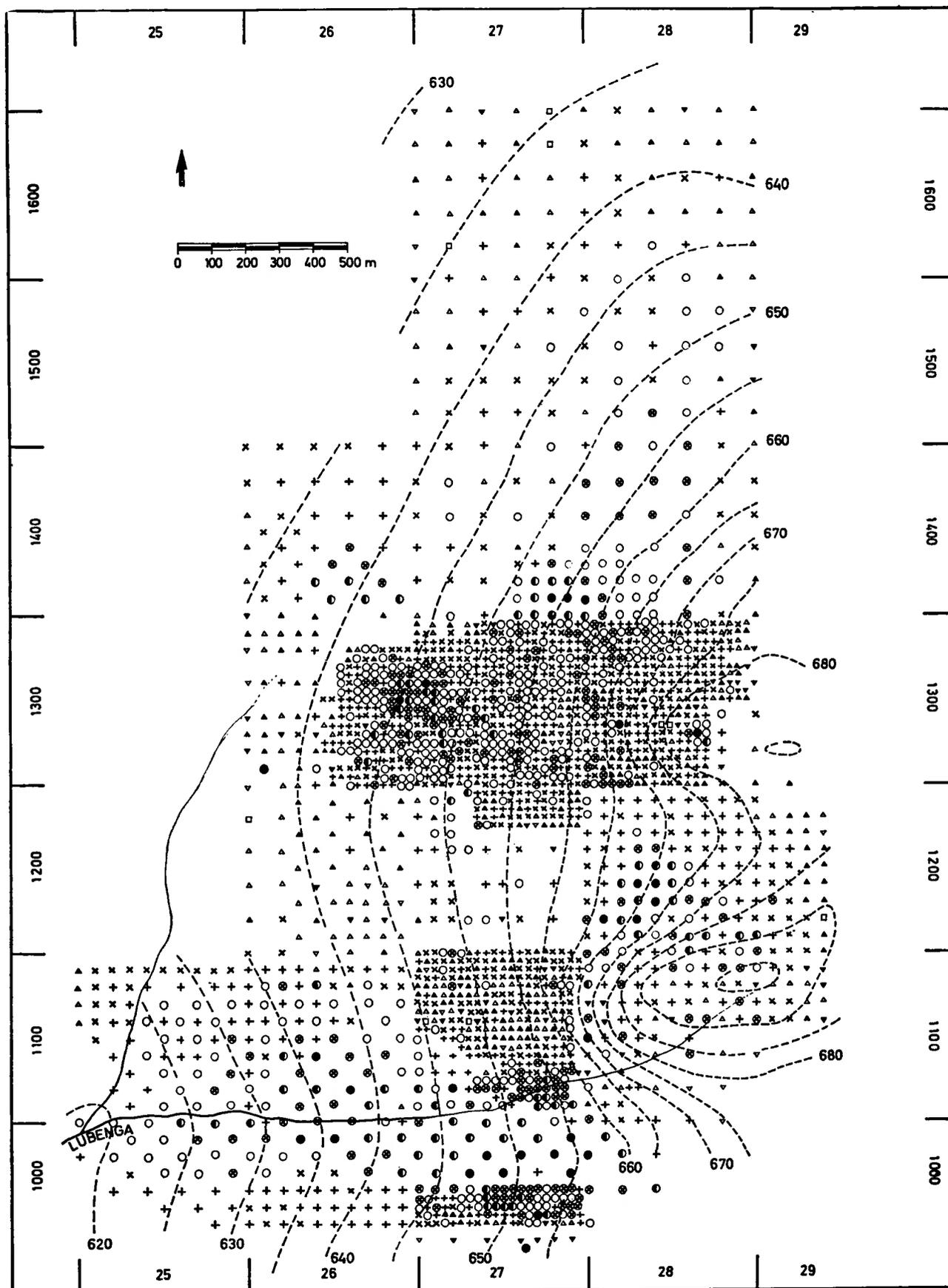


Figure 1 - Résultats des prospections à Bukena:

- | | |
|---|---|
| □ Accumulation < 125 g/m ² | + Accumulation 707-1 000 g/m ² |
| ▽ Accumulation 125-177 g/m ² | ○ Accumulation 1 000-1 414 g/m ² |
| ▼ Accumulation 177-250 g/m ² | ⊗ Accumulation 1 414-2 000 g/m ² |
| △ Accumulation 250-354 g/m ² | ● Accumulation 2 000-2 828 g/m ² |
| ▲ Accumulation 354-500 g/m ² | ● Accumulation > 2 828 g/m ² |
| × Accumulation 500-707 g/m ² | |

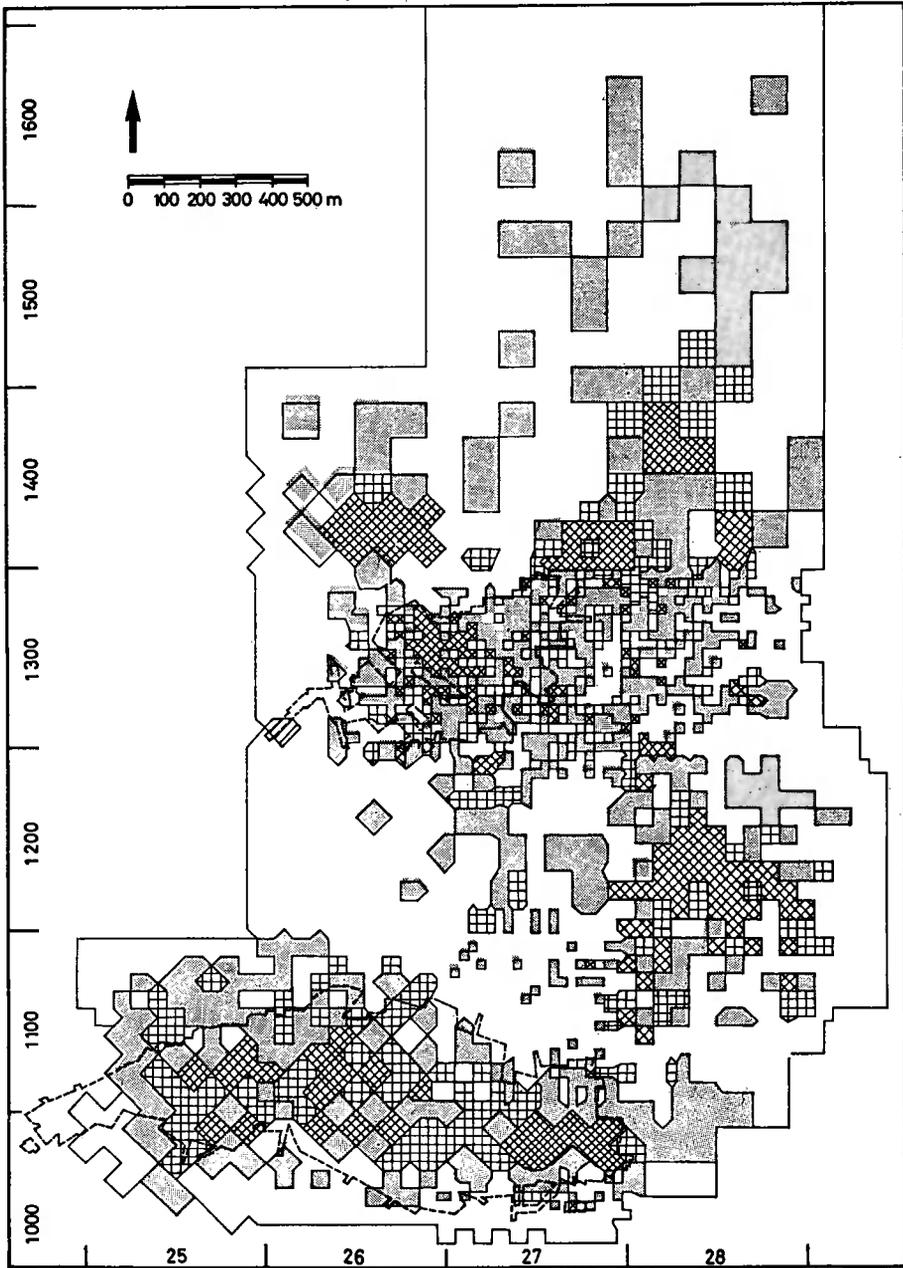


Figure 2 - Zones d'influence des puits, groupées selon les teneurs:

- | | | | |
|----------------------------------|---------------------------------|---|-----------------------------------|
| □ | Teneur 500 g/m ³ | ▣ | Teneur 750-1 000 g/m ³ |
| ◻ | Teneur 500-750 g/m ³ | ⊠ | Teneur 1 000 g/m ³ |
| - - - - - limites d'exploitation | | | |

- la plage Lubenga-sud, en grande partie exploitée;
- la plage Lubenga-nord, située dans les carrés 13.26, 13.27 du quadrillage local et ses prolongements dans les carrés 14.26, 14.27 et 14.28;
- la plage colline Lubenga (carrés 11.28 et 12.28), qui constituait la principale réserve de Bukena.

La plage Lubenga-nord semble se raccorder, sans discontinuité majeure de l'évolution des teneurs, à la plage de la colline Lubenga. Par contre, Lubenga-sud est séparée du reste par une zone de teneurs faibles, comme le prouvent les résultats de la prospection à maille serrée dans le carré 11.27.

On constatera qu'une grande partie des zones riches a déjà été exploitée. Le gisement restant en place ne justifie pas une nouvelle prospection. Si donc on désire un jour reprendre l'exploitation, on sera obligé de se contenter des données existantes (3).

Nous nous mettrons à la place d'un exploitant qui désire estimer le gisement restant, à partir de ces données. Il a le choix entre diverses méthodes d'évaluation. Le seul critère à sa disposition est la production des deux carrières. Il choisira donc les résultats de la méthode qui, pour les zones exploitées, donne des chiffres proches de la production.

Le but de notre travail est donc de comparer les résultats des diverses évaluations possibles. Nos conclusions ne sont *valables que pour Bukena*. Toute tentative de généralisation est étrangère à notre esprit.

Indiquons immédiatement que la production jusqu'en août 1960 a été de 1 416,66 t. de cassitérite [69]. Une autre source [52] indique 1 400 t. Encore, faut-il retrancher la production d'une petite exploitation située dans les carrés 9.22 et 10.22. Nous adopterons donc un chiffre optimum situé aux environs de 1 400 t.

(3) C'est effectivement ce qui vient de se passer [52].

II. DES DIVERSES METHODES D'EVALUATION

Les méthodes d'évaluation des réserves sont probablement aussi vieilles que l'art des mines lui-même. Sans vouloir, comme R. TILLÉ [76], remonter au livre de Job, nous indiquerons que dans un ouvrage paru en 1927 [63] plusieurs pages sont consacrées à la seule évaluation des gisements détritiques.

Les techniques d'évaluation ont subi ces dix dernières années une évolution aussi rapide que remarquable. Nous ne résumerons pas ici les étapes de cette évolution, admirablement esquissée dans l'excellent travail de R. TILLÉ [76]. Toutefois, cet ouvrage doit être abordé avec une certaine prudence, car il ne donne qu'un faible aperçu des travaux d'une des grandes écoles actuelles (l'école géostatistique française) et passe sous silence ceux d'une deuxième (celle du U.S.B.M., Bureau minier des Etats-Unis). Nous croyons donc faire œuvre utile en résumant dans les paragraphes suivants les travaux français et américains.

Ces deux écoles d'évaluation des réserves minières ont suivi des évolutions distinctes. MATHERON, le chef de file de l'école française, semble se désintéresser des travaux américains, et ce n'est que dans un de ses derniers ouvrages [49] qu'il présente une critique serrée mais trop abstraite des méthodes de l'école américaine (qu'il ne cite d'ailleurs pas). De même, les chercheurs de Denver (où se concentre la recherche aux Etats-Unis) ont longtemps ignoré les travaux du centre français de morphologie mathématique. Les auteurs d'un ouvrage récent, qui fait la synthèse des travaux du groupe de Denver, avouent franchement cette ignorance [34, page 246] et l'incompréhension la plus complète règne chaque fois que les travaux qui se rattachent à l'école du U.S.B.M. sont confrontés aux techniques françaises. Ce fut, par exemple, le cas au Congrès de Montréal [57, 14] et plus récemment à une réunion de l'I.M.M. à Londres [38, 66, 81].

La coexistence de deux tendances qui ignorent l'une l'autre a créé une situation telle que le prof. DE WIJS (un des pères des techniques modernes d'évaluation) arrive à souhaiter [16] qu'une

autorité indiscutable (p.ex. le U.S.B.M.) légifère en la matière. Cette situation est d'autant plus regrettable que les deux écoles ont une origine commune, les travaux de SICHEL [42, 43], DE WIJS [15] et KRIGE [35]. MATHERON a d'ailleurs rendu hommage à ces précurseurs, en appelant De Wijsien son principal schéma stochastique, et Krigeage sa technique d'estimation. Pourtant, les travaux américains et français, bien que partant de concepts différents, ne sont pas très éloignés les uns des autres. La méthode américaine des carrés moyens des différences successives à pas variable [26, 34] est l'équivalent de la fonction intrinsèque de MATHERON, et l'ouvrage déjà cité de R. TILLÉ (qui se situe dans le prolongement direct des travaux américains) contient des équations qui rappellent le Krigeage, sans toutefois en donner la solution [76, pages 27-29].

L'évolution rapide et la complexité croissante des techniques d'évaluation, combinée à la confusion résultant de l'existence d'écoles antagonistes, ont créé une cassure nette entre les théoriciens et les utilisateurs, prospecteurs et ingénieurs des mines. Le fossé est encore élargi à cause de la terminologie, volontairement déroutante, et les démonstrations trop abstraites, qui caractérisent l'école française. Mais, même si l'on fait un effort pour comprendre les techniques géostatistiques, on sera incapable de les appliquer correctement. En effet, depuis la publication du deuxième tome du « Traité de géostatistique appliquée », les travaux publiés contiennent bien peu de formules d'application immédiate, et encore moins de données numériques indispensables à leur application. On ne peut mieux résumer ce décalage entre la théorie et la pratique, qu'en évoquant le « Théorème du Statisticien Déçu », de G. MATHERON [44, 45] et les « Réflexions du Prospecteur Désabusé » de R. TILLÉ [76].

Confrontés à ce problème à propos de Bukena, nous avons décidé de nous placer dans le cas de personnes qui ne disposent ni d'un bagage mathématique suffisant ni du temps nécessaire (plusieurs mois probablement) pour passer des formules théoriques aux formules d'application. Nous nous limiterons donc, à quelques exceptions indispensables près, aux calculs possibles à l'aide de formules et données numériques disponibles dans la littérature, même si la précision doit en souffrir.

La question de la précision posera d'ailleurs un autre problème. Les sociétés minières évitent généralement d'indiquer les écarts entre leurs estimations et leurs productions. Les quelques comparaisons que nous avons trouvées dans la littérature spécialisée [30, 54, 82] montrent que ces écarts sont parfois très importants. A Bukena même, on suivait l'évolution des réserves au moyen d'une exploitation fictive, dont la production était égale au tonnage estimé [69].

Or, l'écart entre estimation et production ne résulte pas seulement dans l'erreur d'estimation; la prospection est tout aussi responsable (localisation et volume des échantillons, estimation de la densité du minerai, méthode d'analyse, différence entre la teneur analysée et teneur récupérée, etc...).

L'école de géostatistique ne cite que pour mémoire [9] la « variance géostatistique » (somme des variances de prospection et d'estimation). La précision de l'évaluation prend une importance démesurée, au lieu d'être une fonction de la précision de la prospection. Dans cette optique, la recherche d'une précision d'estimation plus grande, devrait entraîner souvent des prospections coûteuses. La seule tentative publiée, à notre connaissance, de liaison entre le coût d'une prospection supplémentaire et le gain de précision [50] est restée sans lendemain.

Dans le cas particulier de Bukena, il est impossible d'évaluer a posteriori l'erreur de prospection. Une cause supplémentaire d'erreur résultera de l'impossibilité de connaître le volume réellement exploité. Nous assimilerons donc Bukena à un gisement fictif, dont la surface est représentée sur les figures 1 et 2 (4) et dont l'épaisseur, aux points de fonçage des puits, coïncide avec la profondeur de ceux-ci. De même, le gisement exploité aura, dans chaque zone d'influence, une profondeur égale à la profondeur du puits central.

On se trouve ainsi en présence d'un cas particulier d'estimation très défavorable à la précision. Les méthodes géostatistiques, par exemple, ne sont plus théoriquement d'application [44, 45].

(4) Dans une région comme Bukena, la question de surface n'a pas beaucoup de sens. Des grains de cassitérite existent dans toutes les alluvions de la région. La « frange faiblement minéralisée » de MATHERON [44, chap. 14] est énorme et sa limite avec le gisement est une question d'appréciation subjective.

Dans tout ce qui suit, nous nous limiterons donc au calcul de la variance d'estimation et nous adopterons une fourchette conventionnelle relativement large (deux fois l'écart-type), qui ne compensera d'ailleurs pas les erreurs de prospection et d'estimation du volume exploité.

Les techniques d'estimation adoptées appartiennent à trois catégories:

- Estimation à l'aide des méthodes classiques du calcul des moyennes;
- Estimation par analyse des tendances, à l'aide d'un ajustement polynomial;
- Krigeage.

III. NOTATIONS UTILISEES

Par la suite, nous représenterons par:

- T_{ij} la teneur exprimée en g/m^3 et $W_{ij} = \log T_{ij}$ (5)
 A_{ij} l'accumulation exprimée en g/m^2 et $B_{ij} = \log A_{ij}$
 \bar{X} la moyenne d'une variable X (p.ex. teneur, accumulation, volume, surface, etc...)
 $\sigma^2 (X)$ la variance d'une population X
 $Cov (XY)$ la covariance des populations X et Y .

Les indices ij permettent de localiser un échantillon. L'indice i varie dans la direction NS et l'indice j dans la direction WE. L'origine des coordonnées a été placée au coin supérieur gauche du carré 16.25, et l'unité conventionnelle de longueur est de 25 m. Un astérisque * indiquera l'estimateur d'une grandeur.

(5) Les logarithmes utilisés sont les logarithmes naturels.

IV. APPLICATION DES METHODES STATISTIQUES

4.1. Moyennes arithmétiques simples

Les méthodes statistiques classiques ont longtemps servi à l'estimation des teneurs-moyennes. Or, la statistique n'est d'application que si la variable est aléatoire, c'est-à-dire si les valeurs expérimentales correspondent à un tirage au hasard. On voit immédiatement l'écart énorme existant entre les phénomènes naturels et les variables aléatoires. Des auteurs américains [42] donnent un exemple plaisant: vouloir décrire des phénomènes naturels à l'aide de variables aléatoires correspond au travail d'un météorologiste qui, ayant constaté qu'il y a dans sa région 50 % de journées pluvieuses dans l'année, prévoit le temps de demain en jouant pile ou face. La correspondance n'est d'ailleurs pas tout-à-fait exacte dans notre cas, car le météorologiste en délire fait une extrapolation, tandis que l'estimation des réserves est surtout un travail d'interpolation. Quoi qu'il en soit, il est toujours intéressant d'appliquer les méthodes statistiques.

Rappelons que la moyenne arithmétique simple de n échantillons sera calculée par

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k \quad (1)$$

(X = teneur, accumulation, etc...).

et que cette valeur est une estimation non biaisée de la moyenne vraie. On estimera la variance de la population par:

$$\sigma^{*2}(X) = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (X_k - \bar{X})^2 \quad (2)$$

et l'intervalle de confiance de X par:

$$\pm s_a \frac{\sigma^*(X)}{\sqrt{n}} = \pm s_a \sigma^*(\bar{X}) \quad (3)$$

avec $s\alpha$ = variable de Student-Fisher (qui coïncide sensiblement dans notre cas avec la variable normale).

Selon notre convention, nous adopterons la valeur $s\alpha = 2$ (qui correspond à un seuil de confiance de 95 %).

Examinons d'abord les accumulations.

Nous avons reproduit au tableau I les résultats de cette première estimation. Nous y avons indiqué séparément les teneurs et poids de cassitérite pour les parties exploitées et en place du gisement. Une nouvelle erreur importante est, de ce fait, introduite. En effet, nous ne disposons pas d'un relevé exact des carrières. Pour estimer la surface exploitée d'une zone d'influence traversée par la limite d'exploitation, nous avons multiplié la surface S_{ij} de cette zone par un coefficient β_{ij} (égal à la fraction exploitée de S_{ij}) qui est un rapport de deux nombres entiers compris entre 1 et 8.

Tableau I

Estimation				
Moyennes arithmétiques des accumulations A_{ij}				
catégorie	moyenne \bar{A} * gr/m ³	variance $\sigma^{*2}(\bar{A})$	surface m ²	poids SnO ₂ (t) four- chette conventionn.
	<i>gisement exploité</i>			
total	1 281	787	732 890	939 ± 41
$T_{ij} \geq 1\ 000$ g/m ³	2 077	7 668	141 485	293 ± 25
	<i>gisement en place</i>			
total	818	139,31	4 494 610	3 677 ± 106
$T_{ij} \geq 1\ 000$ g/m ³	1 989	3 893	258 905	515 ± 32
	<i>gisement entier</i>			
total	909	145,73	5 227 500	4 751 ± 118
$T_{ij} \geq 1\ 000$ g/m ³	1 999	2 350	400 390	800 ± 19

Sur le tableau I nous avons également distingué la surface totale et les zones d'influence de puits riches ($T_{ij} \geq 1\ 000$ g/t). D'autres catégories de teneurs ($T_{ij} < 500, 750, 1\ 000$; T_{ij} comprise entre 500-750, 750-1 000) ont également été envisagées. Ces calculs ont été faits pour toutes les méthodes d'évaluation qui seront utilisées par la suite. Nous ne croyons pas utile de surcharger nos tableaux en reproduisant ces chiffres.

On constate que, en appliquant le critère adopté au paragraphe 1, l'estimation est mauvaise (939 ± 41 tonnes extraites au lieu de 1 400). Il faudra donc bien rechercher une autre méthode d'évaluation.

Les techniciens de l'estimation utilisent souvent les logarithmes des teneurs ou accumulations, notamment pour étudier les distributions. C'est une solution commode car les logarithmes varient beaucoup moins vite que les variables elles-mêmes.

L'utilisation des logarithmes n'est que rarement poussée jusqu'au calcul des moyennes (6). En effet, la moyenne géométrique

$$\bar{X}_G = e^{\overline{\log X}} \quad (4)$$

est plus faible que la moyenne arithmétique (1). Toutefois, lorsqu'on utilise des logarithmes, on doit, si l'on veut être conséquent, aller jusqu'à l'estimation à l'aide de la formule (4) (Tableau II).

Pour calculer l'intervalle de confiance de la moyenne nous avons adopté la formule $e^{\pm 2\sigma^*(\overline{\log X})}$ proposée par MATHERON

Tableau II

Estimation				
Moyennes arithmétiques des logarithmes des accumulations $B_{ij} = \log A_{ij}$				
catégorie	moyenne \bar{B}^*	variance $\sigma^{*2}(\bar{B})$.10 ⁴	$\bar{A}_G^* = e^{\bar{B}^*}$ g/m ² (*)	poids SnO ₂ (t) Fourchette conventionn.
total $T_{ij} \geq 1\,000$ g/m ³	7,036	<i>gisement exploité</i>		833 ± 0,8 274,9 ± 0,2
	7,572	4,509	1 137	
total $T_{ij} \geq 1\,000$ g/m ³	6,533	<i>gisement en place</i>		3 088 ± 4,5 487,3 ± 0,3
	7,540	1,964	687	
total $T_{ij} \geq 1\,000$ g/m ³	6,630	<i>gisement entier</i>		3 922 ± 5,5 761 ± 0,5
	7,551	1,74	758	
		2,534	1 902	

(*) Les surfaces correspondantes sont indiquées au tableau I.

(6) Sauf dans des cas particuliers, p.ex. les distributions log-normales. Cf. par. 4.3.

[44, p. 79]. Nous le regrettons a posteriori car les logarithmes variant peu, la faible variance de \bar{B} se traduit par un rétrécissement exponentiel de la fourchette conventionnelle. Cette fourchette n'aura donc pas beaucoup de sens sur les tableaux d'estimations à partir de logarithmes.

Si l'on compare la production à l'estimation du tableau II, on constatera que ce dernier chiffre ne représente plus que 60 % du premier. Cette méthode doit donc être abandonnée.

Passons aux teneurs.

Le tableau III résume les résultats de l'estimation. Nous avons déjà une estimation plus précise bien que encore peu satisfaisante.

Tableau III

Estimation				
Moyennes arithmétiques des teneurs T_{ij}				
catégorie	moyenne \bar{T}^* g/m ³	variance $\sigma^{*2}(\bar{T})$	volume m ³	poids SnO ₂ (t) Four- chette conventionn.
total $T_{ij} \geq 1\ 000$ g/m ³	710	168,25	<i>gisement exploité</i> 1 656 720	1 176 ± 48
	1 245	631,2	274 140	341 ± 27
total $T_{ij} \geq 1\ 000$ g/m ³	503	43,64	<i>gisement en place</i> 7 458 750	3 752 ± 98
	1 254	377,1	405 780	509 ± 16
total $T_{ij} \geq 1\ 000$ g/m ³	546	41,73	<i>gisement entier</i> 9 115 470	4 977 ± 118
	1 250	288,03	679 920	850 ± 23

Le tableau IV indique les résultats de l'estimation à partir des logarithmes des teneurs.

Comme dans le cas des accumulations, le tonnage de la partie exploitée est trop faible et cette méthode ne peut pas être retenue.

Signalons encore une particularité de Bukena. Les poids de SnO₂ calculés à partir des teneurs (ou de leurs logarithmes) sont supérieurs aux valeurs correspondantes obtenues à partir des accumulations (ou de leurs logarithmes). Cette constatation est assez générale et indépendante de la technique d'estimation employée.

Tableau IV

Estimation				
Moyennes arithmétiques des logarithmes des teneurs $W_{ij} = \log T_{ij}$				
catégorie	moyenne \bar{W}^*	variance $\sigma^{*2}(\bar{W})$.10 ⁴	$\bar{T}_G^* = e^{\bar{W}^*}$ g/m ³ (*)	poids SnO ₂ (t) Four- chette conventionn.
		<i>gisement exploité</i>		
total	6,471	3,691	646	1 070 ± 1,7
$T_{ij} \geq 1\ 000$ g/t	7,012	3,333	1 227	336,4 ± 0,3
		<i>gisement en place</i>		
total	6,067	1,75	431	3 215 ± 7,5
$T_{ij} \geq 1\ 000$ g/t	7,018	2,70	1 234	500,7 ± 0,4
		<i>gisement entier</i>		
total	6,149	1,49	468	4 266 ± 9,5
$T_{ij} \geq 1\ 000$ g/t	7,112	1,53	1 230	836 ± 0,7

(*) Les volumes correspondants sont indiqués au tableau III.

4.2. Moyennes arithmétiques pondérées

Une méthode plus précise d'évaluation des réserves consiste à attribuer un poids statistique différent à chaque échantillon. On généralisera aisément les formules (1), (2) et (3).

La première idée qui vient à l'esprit, est de pondérer les teneurs par les surfaces des zones d'influence (tableau V).

Nous disposons dans ce cas d'une estimation beaucoup plus précise de nos réserves. La production réelle ne diffère plus que de 140 t. (10 %) du tonnage calculé, mais reste toujours à l'extérieur de la fourchette conventionnelle.

Comme dans le paragraphe précédent, on peut également calculer la moyenne pondérée des $W_{ij} = \log T_{ij}$ (tableau VI).

Les valeurs contenues dans ce tableau sont, comme prévu, plus faibles que celles du tableau V, mais restent encore assez proches de la réalité.

Une méthode encore plus logique de pondération, consiste à pondérer les accumulations par les surfaces ou, ce qui revient au même, les teneurs par les volumes.

Tableau V

Estimation Moyennes des teneurs T_{ij} (pondérées par les surfaces S_{ij})			
catégorie	moyenne \bar{T}^* g/m ³ (*)	variance $\sigma^{*2}(\bar{T})$	poids SnO ₂ (t) Four- chette conventionn.
total $T_{ij} \geq 1\ 000$ g/m ³	<i>gisement exploité</i>		
	760	172,06	1 259 ± 43
total $T_{ij} \geq 1\ 000$ g/m ³	<i>gisement en place</i>		
	464	44,07	3 461 ± 99
total $T_{ij} \geq 1\ 000$ g/m ³	<i>gisement entier</i>		
	505	42,35	4 603 ± 119
total $T_{ij} \geq 1\ 000$ g/m ³			
	1 255	298,35	853 ± 23

(*) Les volumes correspondants sont indiqués au tableau III.

Tableau VI

Estimation Moyennes des logarithmes des teneurs $W_{ij} = \log T_{ij}$ (pondérés par les surfaces S_{ij})				
catégorie	moyenne \bar{W}^*	variance $\sigma^{*2}(\bar{W})$.10 ⁴	$\bar{T}_G^* = e^{\bar{W}^*}$ g/m ³ (*)	poids SnO ₂ (t) Four- chette conventionn.
total $T_{ij} \geq 1\ 000$ g/m ³	<i>gisement exploité</i>			
	6,547	3,400	697	1 154 ± 0,8
total $T_{ij} \geq 1\ 000$ g/m ³	<i>gisement en place</i>			
	7,108	2,86	1 222	335,0 ± 0,15
total $T_{ij} \geq 1\ 000$ g/m ³	<i>gisement entier</i>			
	5,964	2,013	389	2 901 ± 7,5
total $T_{ij} \geq 1\ 000$ g/m ³				
	7,125	2,87	1 244	504,8 ± 0,4
total $T_{ij} \geq 1\ 000$ g/m ³				
	6,045	1,745	422	3 947 ± 9,5
total $T_{ij} \geq 1\ 000$ g/m ³				
	7,119	1,604	1 235	840 ± 0,7

(*) Les volumes correspondants sont indiqués au tableau III.

Tableau VII

Estimation Moyennes des accumulations $B_{ij} = A_{ij}$ (pondérées par les surfaces S_{ij})			
catégorie	moyenne \bar{A}^* g/m ² (*)	variance $\sigma^{*2}(\bar{A})$	poids SnO ₂ (t) Four- chette conventionn.
	<i>gisement entier</i>		
total	1 572	1 203	1 152 ± 51
$T_{ij} \geq 1\,000$ g/m ³	2 410	12 488	341 ± 32
	<i>gisement en place</i>		
total	768	139,91	3 452 ± 107
$T_{ij} \geq 1\,000$ g/m ³	1 991	2 954	515 ± 28
	<i>gisement exploité</i>		
total	881	177,07	4 605 ± 139
$T_{ij} \geq 1\,000$ g/m ³	2 139	3 372	856 ± 23

(*) Les surfaces correspondantes sont indiquées au tableau I.

Tableau VIII

Estimation Moyennes des logarithmes des accumulations $B_{ij} = \log A_{ij}$ (pondérés par les surfaces S_{ij})				
catégorie	moyenne \bar{B}^*	variance $\sigma^{*2}(\bar{B})$.10 ⁴	$\bar{A}_G^* = e^{\bar{B}^*}$ g/m ² (*)	poids SnO ₂ (t) Four- chette conventionn.
	<i>gisement entier</i>			
total	7,234	4,782	1 385	1 015 ± 0,8
$T_{ij} \geq 1\,000$ g/m ³	7,687	28,33	2 180	308,4 ± 0,15
	<i>gisement en place</i>			
total	6,443	2,303	629	2 827 ± 4,5
$T_{ij} \geq 1\,000$ g/m ³	7,554	7,83	1 908	494,0 ± 0,3
	<i>gisement exploité</i>			
total	6,554	2,14	702	3 670 ± 5,5
$T_{ij} \geq 1\,000$ g/m ³	7,601	7,86	2 003	802,1 ± 0,5

(*) Les surfaces correspondantes sont indiquées au tableau I.

Les chiffres des tableaux V et VII sont voisins, sauf pour la partie exploitée du gisement; ces deux estimations peuvent donc être considérées comme équivalentes.

Fidèles à notre démarche habituelle, nous avons également calculé les réserves à partir des moyennes pondérées des logarithmes des accumulations (tableau VIII).

Comme dans les cas précédents, on retrouve notre conclusion générale: L'estimation à partir des logarithmes des accumulations conduit à des chiffres à la fois plus faibles que ceux obtenus à partir des accumulations et à partir des logarithmes des teneurs.

4.3. *Les lois de distribution*

Les recherches des distributions de teneurs et accumulations a joué un rôle important dans l'évolution des méthodes d'estimation. Les travaux des fondateurs des techniques modernes [15, 35, 42, 43] ont montré que la loi log-normale est souvent suivie dans la nature. On dispose alors d'un estimateur de la moyenne X à partir de la moyenne des logarithmes:

$$\bar{X} = e^{\overline{\log X} + \frac{\sigma^2 (\log X)}{2}} \quad (5)$$

et SICHEL [27] a même indiqué un estimateur plus précis que (5).

L'école géostatistique ne fait qu'accessoirement appel aux distributions et certains auteurs estiment même que leur étude n'est pas indispensable [9]. Pourtant, l'étude des distributions des teneurs et accumulations suscite ces dernières années un regain d'intérêt [18, 36, 76]. En particulier les courbes de PEARSON, introduites en évaluation par GROSJEAN [20] sont utilisées dans des travaux récents [18, 76].

Si l'étude des distributions comme une fin en soi [18] nous paraît étrangère au problème de l'estimation des réserves, il est juste d'ajouter qu'elle peut fournir des indications précieuses. TILLÉ, p.ex., utilise les distributions pour déceler la superposition éventuelle de populations distinctes [76].

Avant de présenter une application intéressante dans le cas de Bukena, indiquons que les teneurs et accumulations des puits de prospection dans ce gisement obéissent approximativement à des lois log-normales. L'application de la formule (5) conduit à l'estimation suivante:

Tableau IX

Estimation Loi log-normale (gisement entier)			
teneur moy. \bar{T}^* g/m ³	poids SnO ₂ t	accumulation moy. \bar{A}^* g/ m ²	poids SnO ₂ t
553	5 040	935	4 887

On retrouve des chiffres proches de ceux des tableaux I et III.

Nous croyons également utile de formuler trois remarques générales:

1) Il n'y a aucune raison pour que la distribution log-normale soit une loi privilégiée dans la nature; les arguments de MATHERON en faveur de l'importance exceptionnelle de cette loi [44, chap. 16] sont peu convaincants.

La loi log-normale est une distribution bien connue et donc facilement utilisable. Comme elle dépend de deux ou trois paramètres, on trouve souvent une courbe log-normale qui coïncide avec une distribution expérimentale. Mais, si on se donnait la peine de vérifier l'assimilation d'une telle distribution, à une autre famille de courbes à deux ou trois paramètres, on trouverait une concordance tout aussi bonne; les exemples cités par MATHERON [44] et par TILLÉ [76] en sont la preuve.

Il est, croyons-nous, inutile de recommencer à propos des gisements les discussions byzantines des spécialistes des courbes de partage des laveries gravimétriques [58]. On peut presque toujours assimiler, avec une certaine précision, une courbe expérimentale à une loi théorique convenablement choisie, mais il ne faut pas oublier que cette coïncidence n'est le plus souvent attribuable qu'au nombre élevé de paramètres de cette loi.

2) Les distributions sont parfois peu adaptées à l'étude de problèmes particuliers. Il serait p.ex. impossible de calculer, à l'aide des courbes de distribution, les réserves par catégories de teneurs. Il est également très difficile, voire même impossible, de faire la distinction entre la partie exploitée et la partie en place du gisement.

3) Les lois de distribution doivent être utilisées avec beaucoup de prudence. En particulier, lorsque les teneurs ne sont pas assimilables à des réalisations d'une variable aléatoire, la généralisation des conclusions est très difficile. Nous ne citerons que l'échec relatif de MATHERON [44, chap. 18] dans sa tentative de transposer la formule de SICHEL.

Il ne faut surtout pas croire que l'étude des distributions ne présente pas d'intérêt. Nous voulons ici rappeler le travail de DE WIJS [15], qui a servi de modèle au schéma De Wijsien. Cet auteur admet que si un gisement, ou une partie d'un gisement, de volume V et de teneur T est divisé en deux blocs égaux, les teneurs de ces zones seront:

$$T_1 = T(1 - d) \quad \text{et} \quad T_2 = T(1 + d)$$

d est une constante, qui caractérise le gisement et varie peu avec le mode de découpage et la taille du bloc initial; on retrouve bien l'hypothèse de base des schémas intrinsèques de MATHERON.

On peut donc rediviser les deux zones et ainsi de suite. Après k divisions on aura $2k$ blocs de volumes égaux,

$$v = \frac{1}{2^k} V,$$

dont les teneurs sont:

$$T_i = (1 + d)^{k-i} (1 - d)^i T$$

avec une probabilité

$$P(T_i) = \frac{1}{2} C_k^i$$

Si k est grand, la distribution binomiale de $\log T_i = \log T + k \log(1 + d) + i \log \frac{1 - d}{1 + d}$ tend vers une loi normale et les T_i sont donc distribuées suivant une loi log-normale de variance logarithmique:

$$\sigma^2 = \frac{k}{4} \left[\log \frac{1 - d}{1 + d} \right]^2 = \frac{1}{4 \log 2} \left[\log \frac{1 - d}{1 + d} \right] \log \frac{V}{v} = \alpha \log \frac{V}{v} \quad (6)$$

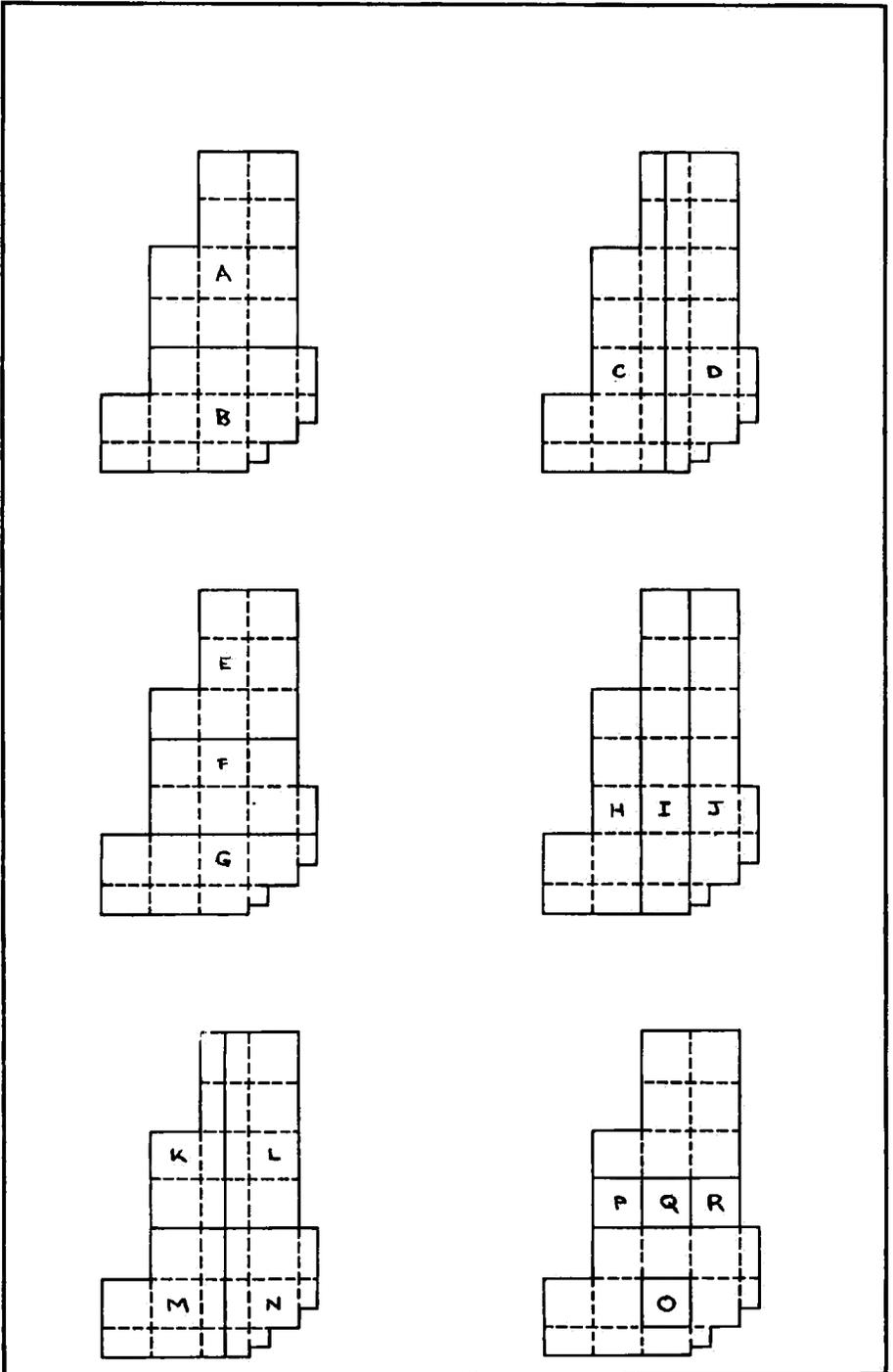
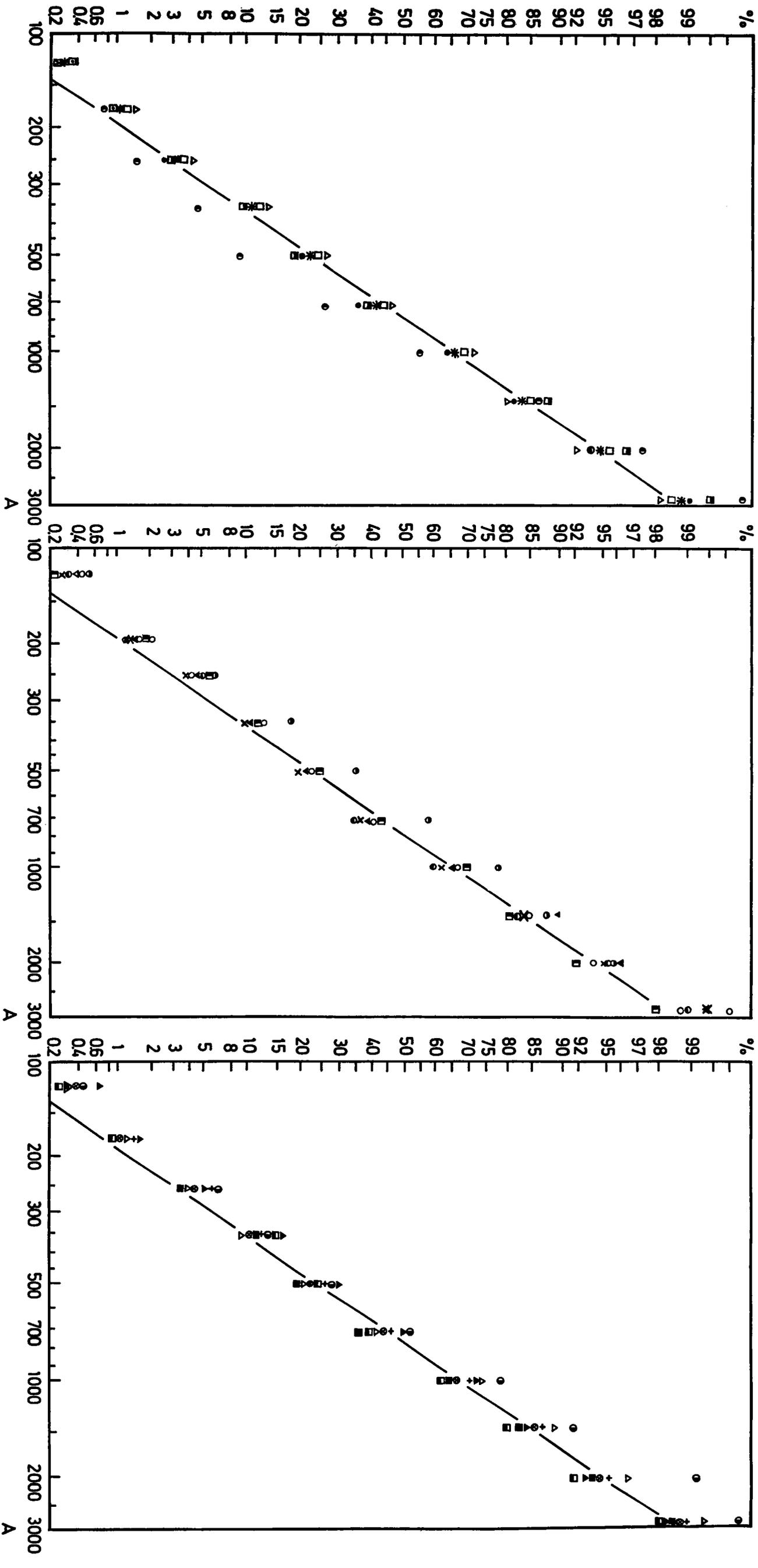


Figure 3 - Découpage du gisement.



La dispersion absolue α caractérise (au même titre que d) le gisement.

Appliquons immédiatement cette théorie à Bukena.

Nous avons représenté à la fig. 3 diverses divisions du gisement en 2, 3 ou 4 parties approximativement égales. Nous définissons ainsi 14 populations de teneurs et accumulations (numérotées de A à N), auxquelles nous ajouterons les carrés contenant plus de 200 puits (populations O, P, Q, R) et les populations totales T.

Les moyennes et variances de l'accumulation dans les différentes populations sont indiquées au tableau X.

Nous avons tracé sur la figure 4 les courbes de distribution des logarithmes des accumulations dans les différentes populations. Les accumulations semblent être distribuées suivant une loi log-normale. On peut vérifier cette impression par le test du χ^2 (tableau XI).

Les populations sont donc bien log-normales, à condition que le bloc considéré ne soit pas trop petit (populations P, Q, R). La loi de DE WIJS admet donc à Bukena une limite inférieure en dessous de laquelle elle n'est plus vérifiée.

Le tableau X indique également que les populations considérées ont des moyennes et des variances proches.

On peut facilement vérifier l'identité statistique de chacune des populations log-normales i considérées à la population-mère T, à l'aide des formules suivantes [53]:

Identité des moyennes: La variable

$$\frac{|\bar{B}_i - \bar{B}_T|}{\sqrt{\frac{\sigma_i^{*2}}{n_i} + \frac{\sigma_T^{*2}}{n_T}}}$$

avec

$$\sigma^{*2} = \frac{n_i \sigma_i^2 (B) + n_T \sigma_T^2 (B)}{n_i + n_T - 2}$$

suit une loi de STUDENT et FISHER à $\nu = n_i + n_T - 2$ degrés de liberté.

Tableau X

population	nombre de puits	Moyennes et variances de l'accumulation dans les ensembles considérés										
		distributions observées					estimateurs des distributions vraies					
		accumulation A		B = log A			écart-type $\sigma^*(A)$	variance $\sigma^2(B)$	écart-type $\sigma(B)$	écart-type $\sigma^*(A)$	variance $\sigma^{*2}(B)$	écart-type $\sigma^*(B)$
		moyenne \bar{A} gr/m ²	écart-type $\sigma(A)$	moyenne \bar{B}	écart-type $\sigma(B)$	écart-type $\sigma^*(B)$						
T	2 229	909	570	6,6304	0,388	0,623	571	0,388	0,623	0,623		
A	1 191	883	484	6,6290	0,340	0,583	484	0,340	0,583	0,583		
B	1 038	938	578	6,6343	0,344	0,587	579	0,344	0,587	0,587		
C	980	926	569	6,6490	0,388	0,623	570	0,388	0,623	0,623		
D	1 249	896	571	6,6137	0,388	0,623	572	0,388	0,623	0,623		
E	242	863	550	6,5381	0,409	0,640	551	0,411	0,641	0,641		
F	1 263	894	492	6,6252	0,361	0,600	492	0,361	0,600	0,600		
G	724	997	643	6,6848	0,404	0,636	644	0,405	0,636	0,636		
H	497	948	575	6,6746	0,390	0,625	576	0,391	0,625	0,625		
I	1 018	923	588	6,6472	0,382	0,618	588	0,382	0,618	0,618		
J	714	861	538	6,5743	0,391	0,625	538	0,392	0,625	0,625		
K	483	930	519	6,6726	0,358	0,598	520	0,359	0,599	0,599		
L	708	851	469	6,5994	0,347	0,589	470	0,347	0,589	0,589		
M	497	922	598	6,6262	0,398	0,631	599	0,399	0,632	0,632		
N	541	953	659	6,6334	0,427	0,653	660	0,428	0,654	0,654		
O	296	786	541	6,4625	0,410	0,640	541	0,411	0,641	0,641		
P	198	929	544	6,6591	0,391	0,625	545	0,392	0,626	0,626		
Q	395	974	415	6,7840	0,215	0,464	416	0,216	0,465	0,465		
R	356	771	416	6,5033	0,314	0,560	417	0,315	0,561	0,561		

Tableau XI

Test du χ^2 appliqué aux distributions de $B = \log A$ dans les différents ensembles considérés									
popula- tion	Nombre de degrés de liberté	χ^2 théorique au seuil de		χ^2 calculé	popula- tion	Nombre de degrés de liberté	χ^2 théorique au seuil de		χ^2 calculé
		10 %	5 %				10 %	5 %	
T	8	13,362	15,507	13,070	J	7	12,017	14,067	11,407
A	7	12,017	14,067	12,263	K	6	10,645	12,592	9,404
B	7	12,017	14,067	13,897	L	6	10,645	12,592	12,099
C	7	12,017	14,067	11,396	M	6	10,645	12,592	10,296
D	8	13,362	15,507	11,981	N	7	12,017	14,067	11,719
E	6	10,645	12,592	8,393	O	6	10,645	12,592	9,202
F	8	13,362	15,507	15,569	P	5	9,236	11,070	12,517
G	7	12,017	14,067	12,571	Q	5	9,236	11,070	31,244
H	7	12,017	14,067	13,933	R	5	9,236	11,070	11,735
I	8	13,362	15,507	14,270					

Identité des variances: La différence

$$\Delta \sigma = \sigma_i (B) - \sigma_T (B)$$

suit sensiblement une loi normale de moyenne nulle et de variance

$$\frac{\sigma^{*2}}{2 n_i} + \frac{\sigma^{*2}}{2 n_T}$$

On peut également calculer le rapport de Snédécór:

$$F = \frac{\sigma_i^{*2} (B)}{\sigma_T^{*2} (B)}$$

qui doit rester très proche de 1.

Nous avons résumé au tableau XII les résultats de ces calculs.

On constatera que l'identité n'est pas toujours vérifiée. En particulier, les moyennes des populations E, G, L, pourraient être considérées comme significativement différentes de la moyenne dans T. Toutefois, les écarts restent faibles et on peut, en première approximation, admettre l'identité statistique (7).

Examinons maintenant les distributions des teneurs. Pour ne pas trop allonger le texte, limitons-nous aux ensembles T, A, B, C et D.

Le tableau XIII indique les moyennes et les variances des teneurs dans ces ensembles. Nous avons également tracé à la figure 5 les courbes des distributions correspondantes.

Cette figure est suffisamment explicite et nous ne croyons pas indispensable de reproduire les résultats des tests du χ^2 ni ceux prouvant l'identité statistique de ces populations.

Les conséquences de ces résultats sont très importantes. Si la division donne dans les blocs des distributions log-normales statistiquement identiques, la constante d de DE WIJS, et donc aussi le coefficient de dispersion absolue α de MATHERON sont nuls. On doit donc admettre que les teneurs et accumulations à Bukena sont des variables aléatoires et que les résultats figurant sur les tableaux I, III et IX sont exacts!

(7) Une étude plus rigoureuse devrait comprendre, en plus, une analyse de la variance. L'identité des populations i à la population-mère T n'entraîne pas nécessairement l'identité des populations entr'elles [59].

Tableau XII

popula- tion	identité des moyennes B		identité des variances $\sigma^{*2}(B)$			$\Delta \sigma$ calculé	rapport F de Snédécór		
	Nombre r de degrés de liberté	valeur théor. de s_{∞} au seuil de 10 %	valeur s_n calculée	écart-type $\sigma(\Delta \sigma)$	intervalle de confiance autour de la moyenne $\Delta \sigma = 0$ au seuil de				
					80 %			95 %	99 %
A	3 418	1,645	0,064	0,0155	0,020	0,030	0,040	1,14	
B	3 265	1,645	0,170	0,0162	0,021	0,032	0,042	1,15	
C	3 207	1,645	0,778	0,0169	0,022	0,033	0,044	1 —	
D	3 476	1,645	0,759	0,0156	0,020	0,031	0,040	1 —	
E	2 469	1,645	2,189	0,0299	0,038	0,059	0,077	1,06	
F	3 490	1,645	0,235	0,0156	0,020	0,031	0,040	1,07	
G	2 953	1,645	1,881	0,0186	0,024	0,037	0,049	1,04	
H	2 724	1,645	1,430	0,0219	0,028	0,043	0,056	1,01	
I	3 245	1,645	0,718	0,0165	0,021	0,032	0,043	1 —	
J	2 941	1,645	2,093	0,0190	0,024	0,037	0,049	1,01	
K	2 710	1,645	1,360	0,0220	0,028	0,043	0,057	1,08	
L	2 935	1,645	1,185	0,0187	0,024	0,037	0,048	1,12	
M	2 725	1,645	1,355	0,0219	0,028	0,043	0,057	1,03	
N	2 768	1,645	0,993	0,0214	0,027	0,042	0,055	1,10	

Tableau XIII

Moyennes et variances de la teneur dans les ensembles considérés

popula- tion	Nombre de puits	Distributions observées						Estimateurs des distributions vraies					
		Teneur T		W = log T				écart- type $\sigma^*(T)$	écart- type $\sigma(W)$	variance $\sigma^{**}(W)$	écart- type $\sigma^*(T)$	variance $\sigma^{**}(W)$	écart- type $\sigma^*(W)$
		moy. \bar{T} g/m ³	écart- type $\sigma(T)$	moy. \bar{W}	variance $\sigma^2(W)$	écart- type $\sigma(W)$							
T	2 229	546	303	6,149	0,331	0,575	303	0,331	0,575	0,331	303	0,331	0,575
A	1 191	586	300	6,236	0,302	0,550	300	0,302	0,550	0,302	300	0,302	0,550
B	1 038	501	301	6,149	0,347	0,589	301	0,347	0,589	0,347	301	0,347	0,589
C	980	552	311	6,150	0,343	0,586	311	0,343	0,586	0,343	311	0,343	0,586
D	1 249	542	297	6,148	0,315	0,561	298	0,315	0,561	0,315	298	0,315	0,561

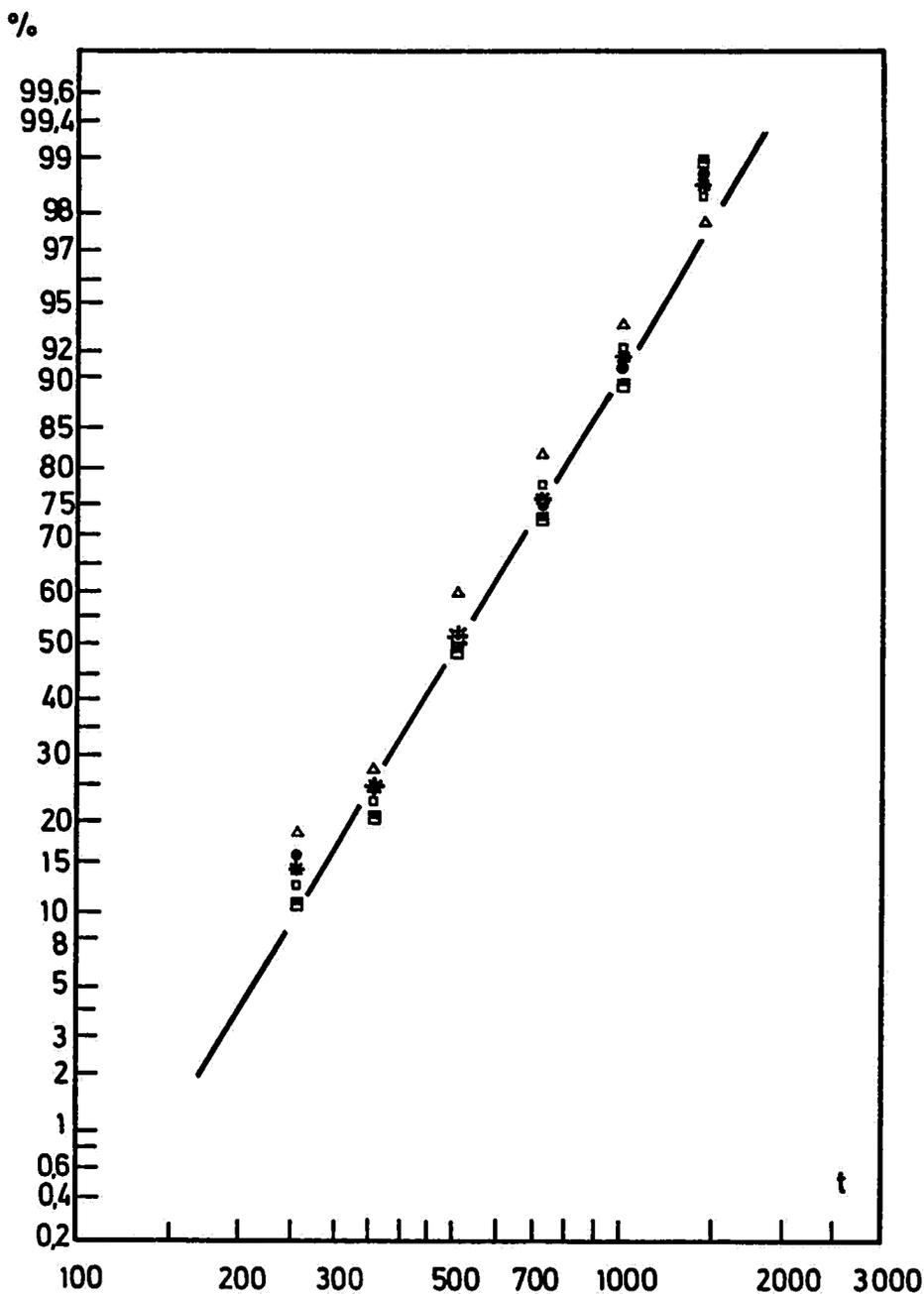


Figure 5 - Distribution des logarithmes des teneurs dans les ensembles considérés:

- * Population T
- ▽ Population B
- Population D
- Population A
- Population C

————— Loi log-normale théorique correspondant à la population T.

Remarquons que MATHERON arrive également à la valeur $d = 0$ pour le gisement de Pb de Bou Kiama, sans toutefois tirer les conclusions qui s'imposent [44, p. 331].

En réalité, notre conclusion à propos de Bukena est un peu hâtive. Les distributions sont log-normales et identiques, à condition que le nombre de blocs soit relativement faible (de 2 à 4). Les blocs correspondant à une division donnée ne sont d'ailleurs pas absolument égaux, et nous n'avons pas envisagé tous les découpages possibles. En effet, c'est la moyenne de d , et non quelques valeurs particulières qu'il faut envisager. De toute façon on doit s'attendre, pour les logarithmes des teneurs et accumulations, à des valeurs expérimentales faibles de α .

V. L'ANALYSE DES TENDANCES

Lorsqu'une série de mesures n'est pas assimilable à une succession de tirages au hasard, on peut utiliser un modèle mathématique, l'analyse des tendances (ou trend), inspiré des procédés d'étude des séries temporelles [11, 32 chap. 48 à 50].

On admet que l'observation $X_i(r)$ en un point r de l'espace est la somme:

- d'un terme de tendance $X_i^*(r)$, analytiquement bien défini;
- d'un terme périodique, qui peut être négligé dans le cas de l'estimation des gisements [1, 76];
- d'un terme purement aléatoire e_i (appelé *résidu*) de moyenne nulle.

On écrira donc: $X(r) = X^*(r) + e(r)$

Considérons un gisement V à l'intérieur duquel on connaît les teneurs dans un ensemble V^1 (V^1 peut être une série de points ou de portions de l'espace).

La composante fonctionnelle $T^*(r)$ de la teneur $T(r)$ en un point r de V peut être représentée sous la forme d'un développement (limité).

$$T^*(r) = \sum_{i=1}^n L_i f_i(r) \quad (16)$$

Les fonctions $f_i(r)$ sont connues et linéairement indépendantes, mais quelconques et les L_i sont des coefficients à déterminer.

Introduisons une *fonction géométrique associée à V^1* :

$$k(r) = \begin{cases} 1 & \text{si } r \in V^1 \\ 0 & \text{si } r \notin V^1 \end{cases} \quad (17)$$

Pour trouver le meilleur ajustement par la formule (16), on choisira les constantes L_i par la méthode des moindres carrés, de façon à rendre minimum la variance des résidus, c'est-à-dire l'intégrale:

$$I = \int_{V^1} e^2(r) dV = \int_{V^1} [T(r) - T^x(r)]^2 dV = \int_V k(r) [T(r) - L_i f_i(r)]^2 dV$$

Pour minimiser I, on écrit que ses n dérivées premières par rapport aux L_i sont nulles. On aura ainsi n équations:

$$\frac{dI}{dL_i} = \sum_{j=1}^n L_j \int_V k(r) f_j(r) f_i(r) dV - \int_V k(r) T(r) f_i(r) dV = 0 \quad (18)$$

Posons:

$$M_{ij} = \frac{1}{V^1} \int_V k(r) f_j(r) f_i(r) dV$$

Les relations s'écrivent:

$$\sum_{j=1}^n L_j M_{ij} = \frac{1}{V^1} \int_V k(r) T(r) f_i(r) dV \quad (19)$$

Si on accepte que la matrice (M_{ij}) admet une matrice inverse (N_{ij}) , la solution de (9) et de notre problème sera:

$$L_j = \frac{1}{V^1} \sum_{i=1}^n N_{ij} \int_V k(r) T(r) f_i(r) dV \quad (20)$$

Depuis son introduction en 1957 [19], l'analyse des tendances a connu des applications les plus variées en sciences de la terre. Outre la géophysique et la cartographie, d'autres branches de la géologie font souvent appel à cette technique. On trouve, p.ex., de belles applications en géologie structurale et en pétrologie des roches ignées [78, 79, 80] avec des développements parfois fort spécialisés, comme les séries de Fourier. En géochimie, on n'hésite pas à introduire des séries comprenant des termes logarithmiques et des puissances négatives [37, 57, 77]. Les C.R. du congrès des applications de l'informatique aux sciences de la terre [51] donnent une image impressionnante de ses recherches.

Mais, c'est bien sûr l'industrie minière qui est le principal utilisateur de l'analyse des tendances. L'étude de l'évolution des

cours des minerais et métaux est une application immédiate de la théorie des séries temporelles. De beaux exemples ont été présentés à l'exposition de la Société Générale de Belgique et des études plus approfondies sont également possibles [17].

L'application à la prospection et évaluation des gisements est principalement l'œuvre du U.S.B.M. Le groupe de Denver ne fait pas une distinction rigide entre prospection et évaluation; à ce point de vue, on peut dire qu'il est plus proche de la réalité que les géostatisticiens. L'interdépendance des deux activités est manifeste dans de nombreux travaux. Les chercheurs du U.S.B.M. se sont efforcés de tenir compte de l'influence de facteurs géologiques et physiques (failles, superposition de minéralisations, propriétés mécaniques des minéraux, etc...) sur la conduite de l'exploration d'un gisement et l'évaluation de ses réserves [26, 28, 43].

D'autres travaux sont consacrés aux questions de la localisation rationnelle des lieux de prélèvement [27, 60] du volume des échantillons [24, 28] des corrélations entre épaisseur et teneur dans le gisement [29], etc...

Les travaux de Denver vont beaucoup plus loin encore. On trouve, p.ex., dans l'ouvrage qui fait la synthèse des conclusions [34] des pages pleines d'intérêt sur le calcul du risque minier, qui précisent très utilement les travaux des pionniers dans ce domaine [56, 74]. Nous ne discuterons pas ici la valeur de ces recherches. Ce qui importe, c'est que les personnes chargées de l'estimation soient conscientes de l'existence de ces problèmes.

La possibilité ou non d'assimiler à une variable aléatoire les teneurs des échantillons prélevés dans un gisement a été pendant longtemps la principale préoccupation des américains. On peut suivre, à travers leurs publications successives, l'évolution de leurs conceptions dans ce domaine [5, 24, 28, 25, 7, 26].

Pour tester l'indépendance de mesures, on peut utiliser un grand nombre de critères. TILLÉ [76] a présenté une synthèse critique de certains d'entr'eux, et on trouve dans la littérature la description de bien d'autres tests [2, 6, 11, 28, 53, 59]. Les chercheurs du U.S.B.M. utilisent principalement la moyenne des carrés des différences successives [5, 7, 24, 25, 26, 27, 28, 34]. Considérons une ligne de sondages; appelons T_i et T_{i+1} les teneurs de deux échantillons voisins, et posons

2 $\gamma(1) = \overline{(T_{i+1} - T_i)^2}$. Si les teneurs sont indépendantes, $\gamma(1)$ est petit et $\varepsilon = 1 - \frac{\gamma(1)}{\sigma^2(T)}$ n'est pas significativement différent de un. En remplaçant $\gamma(1)$ par $\gamma(h)$, les américains ont réinventé, comme nous l'avons vu, le variogramme de MATHERON. C'est en appliquant ce critère qu'ils ont également constaté [75] l'existence possible de corrélations à distance qui annoncent les corrélations différées de MATHERON [48].

On trouve dans les publications du Bureau of Mines de nombreuses applications de l'analyse des tendances [8, 23, 31, 33, 34, 41, 43]. Les fonctions $f_1(r)$ le plus souvent employées sont les deux ou trois premières puissances des coordonnées. On trouve parfois des modèles plus compliqués [31] et notamment un terme de tendances du type $T^*(x, y, z) = e^{P_n(x,y,z)}$ avec $P_n =$ polynome entier de degré n [1, 31]; la méthode des moindres carrés peut être appliquée sur les logarithmes des résidus. Cette expression s'inspire manifestement de la formule de LASKY [39, 40] reliant la teneur et le tonnage dans les gisements de porphyry coppers. Remarquons qu'un développement en série ramène l'exponentielle à la forme (16). D'autre part, comme l'a très justement fait remarquer M. DAVID [13], il n'est pas du tout évident qu'une relation tonnage-teneur se traduise par une relation simple teneur-localisation.

Les publications américaines restent très discrètes sur les programmes de calculs adoptés par le U.S.B.M. [34, 62] et muettes sur les résultats des estimations. Toutefois, certains indices [1, 61] semblent indiquer qu'elles n'ont pas toujours été heureuses.

Tant que de nombreux résultats ne seront pas connus, il sera impossible de juger l'efficacité de cette technique. Les exemples cités par TILLÉ [76] ne peuvent malheureusement pas être retenus. En effet, il s'agit souvent d'exemples numériques reconstitués par superposition de termes, aléatoire et fonctionnel, c'est-à-dire des cas particulièrement favorables.

La critique par MATHERON de la méthode de l'analyse des tendances sera présentée au paragraphe suivant.

Lorsque les fonctions $f_1(r)$ sont des puissances des coordonnées, le calcul du terme de tendance et de la moyenne devient

beaucoup plus facile. Dans l'espace à deux dimensions, qui sera adopté pour Bukena, on écrira alors:

$$T_{ij}^* = \sum_{ij} L_{ij} x^i y^j \quad (21)$$

Supposons que l'on dispose de n échantillons et que le polynome choisi soit du m^{e} degré, c'est-à-dire comporte $k = \frac{1}{2}(m+1)(m+2)$ termes. La matrice L colonne $(k, 1)$ des coefficients L_{ij} est donnée par

$$L = ({}^tM \cdot M)^{-1} \cdot {}^tM \cdot T \quad (22)$$

M est la matrice (n, k) des valeurs numériques $x^i y^j$ des k termes du polynome (21) aux n points (x, y) de prélèvement des échantillons. tM est la matrice (k, n) transposée de la matrice M . T la matrice colonne $(n, 1)$ des teneurs connues.

Le choix du degré du polynome (21) est très important et peu de techniciens se sont préoccupés de ce problème capital [43, 76]. Pour déterminer si l'ajustement polynomial (21) est significatif, TILLÉ [76] utilise l'analyse de la variance. Il faut donc calculer les estimateurs:

$$\text{— de la variance des résidus } \sigma_1^{*2} = \frac{1}{n - k - 1} \sum e_i^2$$

$$\text{— de la variance de la régression } \sigma_2^{*2} = \frac{1}{k} \sum (T_{*ij}^* - \bar{T})^2$$

$$\text{— et de la variance totale } \sigma^{*2} = \frac{1}{n - 1} \sum (T_{ij} - \bar{T})^2$$

Pour que l'ajustement polynomial (21) soit significatif, il faut que le rapport $F^* = \frac{\sigma_2^{*2}}{\sigma_1^{*2}}$ soit supérieur à la valeur

$F(k, n - k - 1)$ de la variable de Snédécour.

Toutefois, un ajustement significatif n'est pas nécessairement un ajustement optimal, et le problème de la recherche du meilleur polynome (21) n'a pas encore reçu de solution satisfaisante.

On peut, par la même occasion, se faire une idée de la distribution des résidus, en calculant les estimateurs de leurs quatre premiers moments [4, 12, 76]:

$$m_2^*(e) = \frac{1}{n-1} \sum e_1^2 \quad m_3^*(e) = \frac{n}{(n-1)(n-2)} \sum e_1^3$$

$$m_4^*(e) = \frac{n^2 - 2n + 3}{(n-1)(n-2)(n-3)} \sum e_1^4 - \frac{3(2n-3)}{(n-1)(n-2)(n-3)} \sum e_1^2$$

et les estimateurs $\beta_1^* = \frac{m_3^{*2}}{m_2^{*3}}$ et $\beta_2^* = \frac{m_4^*}{m_2^{*2}}$ des coefficients qui caractérisent les distributions de PEARSON.

Pour Bukena, nous avons appliqué l'analyse des tendances à chacune des 4 variables considérées (T, W = log T, A, B = log A). Nous avons adopté arbitrairement des polynômes du 4e degré et avons conservé les conventions d'origine et d'unité indiquées au paragraphe 3. Les résultats des ajustements polynomiaux sont indiqués au tableau XIV.

On peut tirer trois conclusions importantes:

1) Les régressions polynomiales sont significatives. En effet, $F(15,2213) \simeq F(15, \infty)$ vaut 1,666 au seuil de confiance de 95 % et 2,04 au seuil de 99 %.

2) Les résidus sont, dans les quatre cas, distribués selon une loi voisine de la loi normale. Cette dernière est caractérisée par les valeurs théoriques $\beta_1 = 0$ et $\beta_2 = 3$.

3) La variation de la teneur est plus rapide dans la direction NS que EW. Il y a donc un run à Bukena et ce phénomène n'a, à notre connaissance, jamais été signalé.

Pour le calcul des valeurs moyennes, nous suivrons le même processus que lors des précédentes estimations. Si donc X est la variable considérée, sa valeur moyenne dans une zone d'influence S_{ij} sera donnée par:

$$X_{ij}^* = \frac{1}{S_{ij}} \int_{S_{ij}} X^*(x, y) dx dy \quad (23)$$

Tableau XIV

Constantes des ajustements polynomiaux				
	Teneurs T		Accumulations A	
	T	W = log T	A	B = log A
L 00	— 59,327.10 ²	— 61,227.10 ⁻¹	— 103,317.10 ²	— 75,224.10 ⁻¹
L 10	1,322.10 ²	2,704.10 ⁻¹	2,416.10 ²	3,252.10 ⁻¹
L 01	2,868.10 ²	4,955.10 ⁻¹	4,815.10 ²	5,575.10 ⁻¹
L 20	— 1,1605	— 2,621.10 ⁻³	— 2,3070	— 3,282.10 ⁻³
L 11	— 3,3148	— 6,059.10 ⁻³	— 5,9432	— 7,425.10 ⁻³
L 02	— 5,4098	— 8,801.10 ⁻³	— 8,6069	— 9,222.10 ⁻³
L 30	0,462.10 ⁻²	1,179.10 ⁻⁵	1,121.10 ⁻²	1,594.10 ⁻⁵
L 21	1,581.10 ⁻²	3,204.10 ⁻⁵	2,466.10 ⁻²	3,686.10 ⁻⁵
L 12	3,074.10 ⁻²	4,935.10 ⁻⁵	5,930.10 ⁻²	6,511.10 ⁻⁵
L 03	5,253.10 ⁻³	8,635.10 ⁻⁵	7,791.10 ⁻³	8,152.10 ⁻⁵
L 40	— 0,349.10 ⁻⁵	— 1,360.10 ⁻⁸	— 1,962.10 ⁻⁵	— 2,464.10 ⁻⁸
L 31	— 4,767.10 ⁻⁵	— 10,133.10 ⁻⁸	— 3,779.10 ⁻⁵	— 8,504.10 ⁻⁸
L 22	— 2,536.10 ⁻⁵	— 4,981.10 ⁻⁸	— 10,258.10 ⁻⁵	— 11,485.10 ⁻⁸
L 13	— 11,442.10 ⁻⁵	— 15,150.10 ⁻⁸	— 19,538.10 ⁻⁵	— 18,936.10 ⁻⁸
L 04	— 22,362.10 ⁻⁵	— 39,813.10 ⁻⁸	— 31,974.10 ⁻⁵	— 35,290.10 ⁻⁸
Σe_{ij}	0,01733	0,000166	0,01126	0,000196
F*	20,60	28,22	20,15	26,08
β_1^*	0,161	0,121	0,250	0,159
β_2^*	3,813	2,648	2,120	2,388

La valeur moyenne \bar{X}^* dans le gisement, ou dans une partie du gisement, sera calculée par:

$$\bar{X}^* = \frac{\sum_{ij} \beta_{ij} S_{ij} \bar{X}_{ij}^*}{\sum_{ij} \beta_{ij} S_{ij}}$$

(les coefficients β_{ij} ont été définis au paragraphe 4.1) et sa variance par la variance des résidus qui admet pour valeur minimum conventionnelle

$$\frac{1}{n^2} \sum_{ij} e_{ij}^2$$

Une cause supplémentaire d'erreur sera introduite par les coefficients β_{ij} . En effet, comme la limite d'exploitation n'est pas

connue avec précision (et est irrégulière), on ne peut pas arrêter l'intégration (23) à cette limite. On est donc obligé d'intégrer sur toute la surface d'une zone d'influence traversée par la limite d'exploitation et de diviser le résultat dans le rapport β_{ij} .

Le tableau XV donne les résultats de l'estimation à partir des teneurs.

Tableau XV

Estimation Moyennes des teneurs calculées par ajustement polynomial (pondération par les surfaces S_{ij})				
catégorie	moyenne \bar{T}^* g/m ³ (*)	variance	variance min.	poids SnO ₂ (t) Four- chette conventionn.
total $T_{ij} \geq 1\ 000\ \text{g/m}^3$	686	<i>Gisement exploité</i>		1 136 ± 24 269 ± 45
	980	201,32	195,81	
total $T_{ij} \geq 1\ 000\ \text{g/m}^3$	447	<i>Gisement en place</i>		3 334 ± 47 399 ± 57
	983	39,45	39,13	
total $T_{ij} \geq 1\ 000\ \text{g/m}^3$	479	<i>Gisement entier</i>		4 366 ± 55 668 ± 72
	982	36,75	36,50	
		2 760	2 540	

(*) Les volumes correspondants sont indiqués au tableau III.

On constatera que les chiffres correspondant à la partie exploitée du gisement et aux zones d'influence des puits à teneur supérieure à 1 000 g/m³ sont faibles et que la fourchette conventionnelle n'est étroite que pour le gisement entier. On trouve ainsi un des points faibles de la méthode employée. Lorsqu'on fait une analyse des tendances étendue à tout le gisement, on trouve probablement une très bonne estimation de la valeur moyenne (8), mais ce même ajustement polynomial ne convient pas nécessairement à l'estimation dans des blocs particuliers du gisement. En

(8) Au paragraphe suivant nous trouverons, par Krigeage, un chiffre très proche de 479 g/m³.

outre, la variance des résidus est dans ces cas trop faible pour représenter l'écart entre l'ajustement polynomial sur tout le gisement et les variations locales de la teneur.

Il faut aussi signaler une autre conclusion importante. La teneur moyenne des zones d'influence des puits à teneur supérieure à $1\ 000\ \text{g/m}^3$ est inférieure à ce chiffre. Ce fait est indépendant de l'imprécision de la méthode dans ces zones (9).

On évaluera, en observant ces chiffres, l'erreur importante que l'on commet en attribuant à une zone d'influence la teneur d'un échantillon central riche lorsqu'il est entouré (et c'est souvent le cas à Bukena) d'échantillons à teneurs plus faibles (10).

Le tableau XVI indique les résultats de l'estimation à partir des logarithmes des teneurs.

Tableau XVI

Estimation					
Moyennes des logarithmes des teneurs calculées par ajustement polynomial (pondération par les surfaces S_{ij})					
catégorie	moyenne \bar{W}^*	variance .10 ⁴	variance min. .10 ⁴	$\bar{T}_G^* = e\bar{W}^*$ g/m ³ (*)	poids SnO ₂ (t) Four- chette conventionn.
			<i>Gisement exploité</i>		
total	6,5188	5,068	4,930	678	1 123 ± 2
$T_{ij} \geq 1\ 000\ \text{g/m}^3$	6,805	116,44	95,88	901	247,0 ± 0,3
			<i>Gisement en place</i>		
total	5,880	1,506	1,494	358	2 670 ± 8
$T_{ij} \geq 1\ 000\ \text{g/m}^3$	6,7856	77,88	67,89	885	359,1 ± 0,5
			<i>Gisement entier</i>		
total	5,965	1,267	1,258	390	3 455 ± 9,5
$T_{ij} \geq 1\ 000\ \text{g/m}^3$	6,7925	45,41	41,79	891	605,8 ± 1

(*) Les volumes correspondants sont indiqués au tableau III.

(9) Qui ne fait qu'accentuer le phénomène.

(10) L'inverse est également vrai. Dans le gisement exploité p.ex. la teneur moyenne dans les zones d'influence des puits $T_{ij} < 500\ \text{g/m}^3$ et nettement supérieure à ce chiffre.

On rencontre ici le seul cas pour lequel la moyenne des logarithmes des teneurs donne (dans la zone exploitée) un poids de cassitérite très proche de celui obtenu par le calcul à partir des teneurs.

Au tableau XVII nous avons résumé les résultats de l'estimation à partir des accumulations:

Tableau XVII

Estimation				
Moyennes des accumulations calculées par ajustement polynomial (pondération par les surfaces S_{ij})				
catégorie	moyenne \bar{A}^* g/m ³ (*)	variance	variance min.	poids SnO ₂ (t) Four- chette conventionn.
total $T_{ij} \geq 1\ 000$ g/m ³	1 538	<i>Gisement exploité</i>		1 127 ± 22 229 ± 45
	1 622	894,95 25 057	870,55 20 635	
total $T_{ij} \geq 1\ 000$ g/m ³	689	<i>Gisement en place</i>		3 097 ± 51 376 ± 71
	1 576	130,62 15 099	129,58 13 147	
total $T_{ij} \geq 1\ 000$ g/m ³	808	<i>Gisement entier</i>		4 224 ± 70 638 ± 73
	1 592	130,27 8 654	129,39 7 963	

(*) Les surfaces correspondantes sont indiquées au tableau I.

Remarquons immédiatement que par cette technique d'estimation, la moyenne des accumulations, pondérées par les surfaces, n'est plus équivalente à la moyenne des teneurs, pondérées par les volumes.

Le tableau XVIII enfin donne l'estimation à partir des logarithmes des accumulations.

Ces chiffres sont beaucoup trop faibles pour pouvoir être retenus.

En comparant les chiffres des tableaux XVII et XVIII aux valeurs correspondantes figurant sur les tableaux XV et XVI, on constate que, comme pour les estimations précédentes, les accumulations (et leurs logarithmes) conduisent à des résultats plus

Tableau XVIII

Estimation					
Moyennes des logarithmes des accumulations calculées par ajustement polynomial (pondération par les surfaces S_{ij})					
catégorie	moyenne \bar{B}^*	variance .10 ⁴	variance min. .10 ⁴	$\bar{A}_G^* = e\bar{B}^*$ g/m ² (*)	poids SnO ₂ (t) Four- chette conventionn.
			<i>Gisement exploité</i>		
total	7,185	6,163	5,994	1 319	967 ± 1
$T_{ij} \geq 1\ 000\ \text{g/m}^3$	7,2439	119,75	98,62	1 400	198,1 ± 0,2
			<i>Gisement en place</i>		
total	6,315	1,763	1,449	553	2 485 ± 4,5
$T_{ij} \geq 1\ 000\ \text{g/m}^3$	7,1865	85,3	74,27	1 332	344,9 ± 0,4
			<i>Gisement entier</i>		
total	6,437	1,505	1,495	625	3 269 ± 5,5
$T_{ij} \geq 1\ 000\ \text{g/m}^3$	7,2068	48,34	44,48	1 349	540,2 ± 0,6

(*) Les surfaces correspondantes sont indiquées au tableau I.

faibles que ceux obtenus à partir des teneurs (et leurs logarithmes).

En conclusion, nous dirons que, pour Bukena, l'analyse des tendances ne convient éventuellement que pour l'estimation globale des réserves.

VI. KRIGEAGE

6.1. *Les variables régionalisées* [9, 44, 45, 46, 48, 68, 70]

6.1.1. *Définitions*

Nous croyons utile de donner un large résumé des travaux de l'école géostatistique. Dans la mesure du possible, nous éviterons d'utiliser le langage des géostatisticiens. Toutefois, nous sommes obligés d'utiliser leurs termes, afin de ne pas créer de confusion.

Selon MATHERON, une variable régionalisée (V.R.) décrit l'évolution dans l'espace d'un phénomène naturel, p.ex. d'une teneur $T(r)$. La V.R. n'est définie que dans une région déterminée, le gisement (ou plus généralement son champ géométrique). Le plus souvent, on ne connaît pas les valeurs ponctuelles d'une V.R., mais les valeurs moyennes à l'intérieur du volume v d'un échantillon (ou plus généralement d'un support géométrique).

La recherche des valeurs ponctuelles posera d'ailleurs des difficultés de définition. En effet, si l'échantillon est ponctuel, la V.R. ne peut prendre que les valeurs 0 ou 1, selon que le point est à l'intérieur ou à l'extérieur d'un grain minéralisé; encore faudra-t-il définir cette valeur sur la surface d'un tel grain (qui apparaît à cette échelle comme une surface de discontinuité).

A une échelle plus grande, la variation d'une V.R. présente une certaine continuité. Toutefois, il n'est pas exclu qu'à l'intérieur du gisement existent un ou plusieurs réseaux de discontinuités liés à des structures particulières (lentilles, sécrétions, filonets, micro-bassins de sédimentation, joints de stratifications, etc...). Il arrive même que la valeur moyenne de $[T(r) - T(r_0)]^2$ ne tende pas vers zéro, lorsque $r \rightarrow r_0$. On a alors un *effet de pépite*. La seule condition que l'on impose à une V.R. est que $\int T(r) dV$ ait un sens dans un domaine quelconque du gisement. On sent intuitivement qu'une grandeur physique, telle que la teneur, remplit toujours cette condition.

Une V.R. n'est pas assimilable à une variable aléatoire. En effet, un échantillon v prélevé dans une région bien déterminée du gisement est une réalisation unique, non reproductible et deux échantillons voisins ne sont généralement pas indépendants. On peut considérer les V.R. comme la généralisation des séries temporelles dans l'espace à trois dimensions (ou à n en général).

On ne peut donc ni appliquer aux V.R. les schémas statistiques, ni les considérer comme des variables fonctionnelles (sauf cas de variation régulière). On les assimile aux fonctions aléatoires à une infinité de composantes (le nombre est égal à celui des points dans un gisement). Ce rapprochement ne facilite d'ailleurs pas leur étude, car on ne connaît en pratique qu'une seule réalisation simultanée d'un nombre fini de composantes (les teneurs dans les échantillons).

6.1.2. Les représentations transitives

La théorie générale des V.R. reste à établir. Elle devait [46] faire l'objet du 3e tome du « Traité de géostatistique appliquée » de MATHERON (malheureusement non publié). SERRA [71] semble avoir avancé dans ce sens lors de l'étude de la couche grise de Lorraine, mais reste très discret sur le support théorique utilisé. Les *représentations transitives* [48] introduisent un formalisme mathématique permettant de décrire les V.R. sans référence à leur nature physique.

Appelons donc V le gisement et $k(r)$ la fonction géométrique associée à V (formule 17).

On définit le *covariogramme transitif* par:

$$g(h) = \int_V T(r) T(r+h) dV$$

et le *covariogramme géométrique* par:

$$K(h) = \int_V k(r) k(r+h) dV$$

$K(h)$ représente le volume de l'intersection du gisement V avec la portion de l'espace obtenue par translation h de V . En particulier, $K(O) = V$.

Les fonctions $g(h)$ et $k(r)$ sont $\neq 0$ tant que r et $r+h$ sont à l'intérieur du gisement, c'est-à-dire aussi longtemps que h reste

inférieur à une grandeur D appelée *portée* (ou diamètre) du gisement.

On voit immédiatement l'intérêt que présente le covariogramme pour la définition de la granulométrie (il suffit de remplacer le mot gisement par grain) [22, 47].

Le covariogramme est une fonction paire. En effet, si on change h par $-h$ la transposée de g vaut ${}^t g(h) = g(-h) = g(h)$. D'une façon générale $g(h)$ est une fonction plus régulière que $T(r)$. Ainsi, si on peut montrer [48, p. 23, 271] que si T admet une dérivée première dans une direction, le covariogramme admet une dérivée seconde. Mais un covariogramme transitif n'est pas nécessairement régulier et on peut avoir une discontinuité à l'origine ou effet de pépite (11). Il sera caractérisé par la constante de pépite

$$C = |g_{\text{droite}}(0) - g_{\text{gauche}}(0)|$$

Remarquons aussi qu'il est commode d'écrire autrement la définition des covariogrammes. On appelle produit de convolution de deux fonctions f_1 et f_2 l'intégrale:

$$f_1 * f_2 = \int_V f_1(r) f_2(h-r) dV$$

et si

$${}^t T = T(-r) \quad \text{et} \quad {}^t k = k(-r)$$

sont les transposées de T et k on aura:

$$g(h) = T * {}^t T \quad \text{et} \quad K(h) = {}^t k * k \quad (24)$$

Dans la pratique de la prospection, la teneur ponctuelle $T(r)$ n'est pas connue; on détermine expérimentalement la teneur moyenne d'un échantillon de volume v entourant le point r . La quantité de substance utile contenue dans le volume v est:

$$q(r) = \int_v T(r+h) dh$$

où \vec{h} est un vecteur dont l'origine est r et l'extrémité balaye v . La teneur moyenne dans v , qui est elle-même une V.R., sera donc:

(11) Ce terme indique une anomalie dépourvue de zone d'influence à l'échelle de l'observation. C'est le cas des pépites d'or dans les gisements détritiques.

$$\bar{T}(r) = \frac{q}{v} = \frac{1}{v} \int_v T(r+h) dh \quad (25)$$

Généralisons la notion de quantité de métal en pondérant la teneur par un facteur de pondération $p(h)$. La teneur moyenne dans v sera donc donnée par:

$$\bar{T}(r) = \frac{1}{P} \int_v T(r+h) p(h) dh$$

avec

$$P = \int_v p(h) dh$$

Remplaçons h par $h-r$ et introduisons le produit de convolution:

$$\bar{T}(r) = \frac{1}{P} \int T(h) \tau p(r-h) dh = \frac{1}{P} T * \tau p$$

Le covariogramme (24) apparaît comme la quantité de substance utile obtenue lorsqu'on pondère la teneur par elle-même.

Appelons $P(h) = p * \tau p$ le covariogramme de la fonction de pondération et cherchons le covariogramme $g_t(h)$ de la teneur moyenne $\bar{T}(r)$:

$$g_t(h) = \bar{T} * \tau \bar{T} = \frac{1}{P^2} T * \tau p * \tau T * p = \frac{1}{P^2} g(h) * P(h)$$

Le covariogramme $g_t(h)$ est plus régulier que $g(h)$. Si par exemple $T(h)$ n'est pas dérivable mais que $p(h)$ admet des dérivées premières, $P(h)$ et donc $g_t(h)$ admettent des dérivées secondes. Le prélèvement d'échantillons non ponctuels a donc un effet de *polissage* (ou de régularisation) et $g_t(h)$ s'appelle covariogramme régularisé.

Un des résultats intéressants de la géostatistique est la possibilité de calculer le covariogramme des accumulations à partir du covariogramme des teneurs. En géostatistique, cette opération s'appelle *montée d'ordre 1* (12).

(12) Une montée en granulométrie permet de passer des dimensions des grains aux dimensions de leurs sections en lame mince [17].

Si $T(x, y, z)$ est la teneur, l'accumulation est une V.R.:

$$A(x, y) = \int T(x, y, z) dz$$

Appelons

$$\varphi_3(u) = \varphi_3(u_1, u_2, u_3) = \int T(r) e^{-2\pi i u r} dr$$

la transformée de Fourier d'une variable régionalisée (p.ex. la teneur T). On peut montrer [48, p. 28] que la transformée du covariogramme vaut $G_3(u) = \int g_3(h) e^{-2\pi i u h} dh = |\varphi_3(u)|^2$. On déduit dès lors de la définition (25) de la montée que la transformée $\varphi_2(u)$ de Fourier de l'accumulation $A(x, y)$ est $\varphi_2(u_1, u_2) = \varphi_3(u_1, u_2, 0)$ et la transformée $G_2(u)$ de son covariogramme $g_2(h) = A^* \epsilon A$ vaut:

$$G_2(u_1, u_2) = |\varphi_2(u_1, u_2)|^2 = |\varphi_3(u_1, u_2, 0)|^2$$

On peut bien sûr généraliser cette opération et passer d'un espace à n dimensions à un espace à m ($< n$) dimensions. Ce sont des montées d'ordre supérieur. On trouvera dans un ouvrage de MATHERON [48, p. 31-51] de nombreuses applications pour des formes particulières de covariogrammes qui ne dépendent pas de la direction (et que MATHERON appelle claviers isotropes). Nous rencontrons ici une des faiblesses de la géostatistique. Cette technique n'est applicable que si les variations de teneurs (ou d'accumulations) sont isotropes (ne dépendent pas de la direction). Nous savons déjà, par l'analyse des tendances, qu'à Bukena il y a un run; la géostatistique n'est donc pas rigoureusement d'application dans ce cas.

Examinons l'unique cas d'estimation traité théoriquement dans le cadre des représentations transitives.

Considérons un gisement très grand (théoriquement ∞) reconnu par des échantillons prélevés aux nœuds d'un réseau régulier parallélépipédique rectangle, et appelons a_1, a_2, a_3 les dimensions du parallélépipède de base, dont le volume est $P = a_1 a_2 a_3$.

Adoptons pour origine un nœud de coordonnées x_0, y_0, z_0 . Les coordonnées des autres nœuds seront $x_1 = x_0 + k_1 a_1, y_1 = y_0 + k_2 a_2, z_1 = z_0 + k_3 a_3$; les nombres entiers k_1, k_2, k_3 varient, suivant notre hypothèse, de $-\infty$ à $+\infty$

La quantité exacte de substance utile contenue dans le gisement vaut:

$$Q = \int T(r) dV \quad (26)$$

Choisissons pour estimateur:

$$Q^*(r_1) = a_1 a_2 a_3 \sum_{k_1, k_2, k_3 = -\infty}^{+\infty} T(r_1)$$

Puisque l'origine x_0, y_0, z_0 est arbitraire, la fonction $Q^*(r_1)$ est une fonction périodique de périodes a_1, a_2, a_3 . On peut donc la développer en série de Fourier.

$$Q^*(r_1) = \sum_{p_1, p_2, p_3} C_{p_1 p_2 p_3} \exp \left[2 \pi i \left(p_1 \frac{x_0}{a_1} + p_2 \frac{y_0}{a_2} + p_3 \frac{z_0}{a_3} \right) \right] \quad (27)$$

avec

$$C_{p_1 p_2 p_3} = \frac{1}{P} \int_P Q^*(r_1) \exp \left[-2 \pi i \left(p_1 \frac{x_0}{a_1} + p_2 \frac{y_0}{a_2} + p_3 \frac{z_0}{a_3} \right) \right] dV = \varphi \left(\frac{p_1}{a_1}, \frac{p_2}{a_2}, \frac{p_3}{a_3} \right) \quad (28)$$

On voit immédiatement l'inconvénient de l'idéalisation introduite. Ou bien le gisement est infini et l'intégrale (26) est aussi égale à l'infini, ou bien le gisement est fini et le développement (27) n'est plus légitime. Les conséquences de cette incompatibilité se font sentir lors du calcul de la variance de l'estimation.

Le terme indépendant de (27) vaut:

$$C_0 = \varphi(0, 0, 0) = \int T(r) dV = Q$$

et ce sont donc les termes harmoniques qui représentant l'erreur de l'estimation.

Pour évaluer cette erreur, on définit la variance d'estimation comme la valeur moyenne du carré de l'erreur $[Q^*(r) - Q(r)]^2$ dans le parallélépipède de base $P = a_1 a_2 a_3$

$$\sigma^2(a) = \frac{1}{P} \int_P [Q^*(r) - Q(r)] dv$$

On peut montrer qu'il est impossible d'estimer cette variance lorsqu'on ne connaît que l'estimateur $g^*(ka)$ du covariogramme transitif, calculé à partir des points de prélèvement des échantillons. Même donc pour le cas particulier envisagé, il est impossible de connaître la précision de l'estimateur $Q^*(r_1)$. On peut bien sûr choisir a priori un covariogramme transitif (13). Mais même dans ce cas, la variance $\sigma^2(a)$ de l'estimation comportera un terme régulier (ou d'extension) et un terme fluctuant imprévisible (ou Zitterbewegung) qui résulte de l'incompatibilité que nous avons signalée, c'est-à-dire de la discontinuité de raccordement du covariogramme théorique à un axe, p.ex. x lorsque la distance x devient égale à la portée du gisement.

Le problème de l'estimation se complique encore lorsqu'on envisage la corégionalisation, c'est-à-dire l'estimation de deux ou plusieurs V.R. dans un gisement (p.ex. le volume et la teneur). On doit en effet tenir compte non seulement des corrélations directes (ou internes) des valeurs de ces variables en un point r , mais aussi des corrélations différées entre les valeurs de ces variables en des points différents.

L'étude de la corégionalisation est encore très peu poussée. Elle se limite à l'établissement des conditions d'indépendances (interne et différée) de deux V.R.

En conclusion, nous dirons que la théorie générale des V.R. ne conduit pas (au stade actuel des connaissances) à la solution du problème de l'estimation.

Pour arriver à résoudre ce problème, il faut introduire une hypothèse supplémentaire. C'est ce que MATHERON fait dans sa théorie intrinsèque.

6.1.3. *La théorie intrinsèque et le schéma De Wijsien*

Les applications pratiques de la théorie des V.R. sont rendues possibles dans le cas particulier où elles peuvent être assimilées à des fonctions aléatoires stationnaires. Pendant de nombreuses

(13) Par exemple une des fonctions isotropes que Matheron appelle claviers.

années l'école française de morphologie mathématique s'est uniquement consacrée à l'étude de schémas particuliers appelés intrinsèques.

La géostatistique (s.s) est l'application à l'estimation des gisements du schéma dit De Wijsien [44, 45]. Ce n'est que plus tard que les schémas transitifs (14) ont été introduits par SERRA, et beaucoup plus tard encore que MATHERON a présenté la théorie des représentations transitives [48].

Comme dans le cas général, une variable régionalisée, par exemple la teneur $T(r)$ dans un gisement, sera assimilée à une fonction aléatoire; les teneurs aux points r_1, r_2, \dots, r_n ne seront donc pas considérées comme des constantes mais des réalisations (des tirages) de variables aléatoires $T(r_1), T(r_2) \dots T(r_n)$. Ces variables sont les composantes d'une fonction aléatoire $T(r)$ caractérisée par la fonction de distribution:

$$F(T_1 \dots T_n; r_1 \dots r_n) = \text{Prob. } \{T(r_1) \leq T_1, \dots, T(r_n) \leq T_n\}$$

La fonction aléatoire $T(r)$ est *stationnaire* si la loi de probabilité en n points arbitraires r_1, \dots, r_n est conservée par une translation d'ensemble h de ces points:

$$F(T_1 \dots T_n; r_1 \dots r_n) = F(T_1 \dots T_n; r_1 + h \dots r_n + h)$$

Le phénomène teneur se répète dans l'espace et on peut donc appliquer les formules classiques de la statistique. On définit la moyenne en un point r_1

$$\bar{T}(r_1) = E \{T(r_1)\} = \int T(r_1) dF(T, r_1)$$

La variance (si elle existe):

$$\sigma^2 \{T(r_1)\} = E \{[T(r_1) - \bar{T}(r_1)]^2\}$$

et la covariance de $T(r_1)$ et $T(r_2)$

$$\text{Cov}(r_1, r_2) = E \{[T(r_1) - \bar{T}(r_1)] \cdot [T(r_2) - \bar{T}(r_2)]\}$$

Comme la fonction $T(r)$ est stationnaire, on a bien sûr:

$$\text{Cov}(r_1 + h, r_2 + h) = \text{Cov}(r_1, r_2) = G(r_1 - r_2)$$

(14) Aucun rapport entre les schémas transitifs et les représentations transitives; le choix des termes semble limité en géostatistique.

On appelle *covariogramme*, ou fonction d'autovariance, la covariance des valeurs des teneurs en deux points distants de h :
 $G(h) = \text{Cov}(r+h, r)$

On a immédiatement:

$$G(h) = G(-h) \leq G(0) = \sigma^2(T) > 0$$

On dit que les teneurs obéissent à une loi de *dispersion absolue* (ou à un *schéma intrinsèque*) si les différences:

$$\varepsilon_{1j} = T(r_1) - T(r_j)$$

des teneurs aux points r_1 et r_j sont des composantes d'une fonction aléatoire stationnaire.

Pour décrire les schémas intrinsèques MATHERON utilise le *semi-variogramme*, ou fonction intrinsèque:

$$\gamma(h) = \frac{1}{2} E \{ [T(r+h) - T(r)]^2 \} \quad (29)$$

On a, pour des teneurs stationnaires,

$$\gamma(h) = G(0) - G(h) \quad (30)$$

Dans la pratique on a pris l'habitude de considérer comme équivalentes [44, p. 57] les trois estimations suivantes de $\gamma(h)$ dans un gisement V :

$$\gamma^*(h) = \frac{1}{2V} \int_V [T(r+h) - T(r)]^2 dV \quad (31, A)$$

$$\gamma^*(h) = \frac{1}{2} \sigma^{*2} \{ [T(r+h) - T(r)]^2 \} \quad (31, B)$$

$$\gamma^*(h) = G^*(0) - G^*(h) = \sigma^{*2}(T) - G^*(h) \quad (31, C)$$

Dans un gisement réel et fini, ces estimations ne sont pas équivalentes. Pour apprécier l'écart entre ces trois expressions, indiquons le processus de passage de l'une à l'autre, en partant de (31,C), dans le cas simple de l'espace à une dimension, c'est-à-dire le long d'une ligne L de prélèvement d'échantillons.

Appelons \bar{T} et \bar{T}_h les moyennes de $T(x)$ et $T(x+h)$ le long de L

$$\begin{aligned}
 G^*(0) - G^*(h) &= \frac{1}{L} \int_0^L [T(x) - \bar{T}]^2 dx - \\
 &\quad \frac{1}{L-h} \int_0^{L-h} [T(x) - \bar{T}] [T(x+h) - \bar{T}_h] dx \\
 &\simeq \frac{1}{2(L-h)} \int_0^{L-h} [T(x) - \bar{T}]^2 dx + \\
 &\quad \frac{1}{2(L-h)} \int_0^{L-h} [T(x+h) - \bar{T}_h]^2 dx - \\
 &\quad \frac{1}{L-h} \int_0^{L-h} [T(x) - \bar{T}] [T(x+h) - \bar{T}_h] dx = \\
 &\quad \frac{1}{2(L-h)} \int_0^{L-h} [T(x+h) - T(x) + \bar{T} - \bar{T}_h]^2 dx \\
 &= \frac{1}{2} \sigma^{*2} \{ [T(x+h) - T(x)]^2 \} \simeq \\
 &\quad \frac{1}{2(L-h)} \int_0^{L-h} [T(x+h) - T(x)]^2 dx
 \end{aligned}$$

Nous donnerons pour Bukena deux exemples montrant la différence entre les estimations (31,A) et (31,B).

D'une façon beaucoup plus fondamentale d'ailleurs on peut se demander si $\gamma^*(h)$ de la formule (31,A) et $G^*(h)$ sont dans un gisement des estimateurs non biaisés de $\gamma(h)$ et $G(h)$ [11, 59]. MATHERON aborde également ce problème [48, chap. 13] et arrive à la conclusion que l'estimation est biaisée. Le biais est

tellement important que « en dehors du voisinage immédiat de l'origine il n'y a plus qu'un rapport lointain entre le demi-vario-gramme local (15) et la fonction intrinsèque ». Le biais se manifeste par une fluctuation d'amplitude croissante (Zitterbewegung) et nous donnerons de nombreux exemples à propos de Bukena.

Revenons à l'étude théorique. Si le gisement est supposé infini $G(\infty) = 0$ et la formule (30) devient $G(h) = \gamma(\infty) - \gamma(h)$.

On voit immédiatement l'intérêt de la fonction $\gamma(h)$. Lorsque la dispersion des teneurs des échantillons est grande, leur variance $G(0) \rightarrow \infty$ et $G(h)$ n'a plus de sens. Par contre, le semi-vario-gramme est une fonction croissante et bien définie à l'origine. Ce n'est que pour $h \rightarrow \infty$ que γ tend éventuellement vers l'infini.

Cette remarque permet de faire la distinction entre les deux familles de schémas intrinsèques:

1) Les schémas transitifs sont caractérisés par une fonction $\gamma(h)$ qui croît jusqu'à une valeur $h = a$ (appelée portée de transition) et reste ensuite constante. On aura donc $G(h \geq a) \simeq 0$.

En prospection, la portée est la distance maximum à laquelle l'influence d'un échantillon se fait sentir.

SERRA [70, 71] a montré que dans le cas, par exemple, de la couche grise de Lorraine, il n'y a pas un palier, mais sept (la portée varie de quelques mm à plusieurs km). Ces transitions correspondent à des phénomènes géologiques déterminés (concrétionnements, microbassin de sédimentation, etc...) qui se superposent (des structures gigognes). Certains d'entr'eux ne sont pas accessibles à l'observation géologique directe.

2) Les schémas caractérisés par des fonctions $\gamma(h)$ qui ne présentent pas de tendance asymptotique. Le plus connu est le schéma de DE WIJS qui, dans le cas des gisements, se caractérise par le semi-vario-gramme théorique:

$$\gamma(h) = 3 \alpha \log h \quad (32)$$

α s'appelle la dispersion absolue du gisement.

L'existence de schémas du type De Wijien choque au premier abord le bon sens. En effet, elle revient en pratique à étendre à tout le gisement la zone d'influence d'un prélèvement.

(15) Calculé à l'aide de la formule (31, A).

On peut bien sûr supposer [48, p. 126] que le schéma De Wijsien est une approximation (pour h petit) d'un schéma transitif. Mais, on peut également arriver à DE WIJS par superposition de schémas transitifs de même amplitude [71]. Si, par exemple, on additionne:

$$\gamma_0(h) = \begin{cases} \sum_n k_{0,n} h^n & \text{pour } h \leq 1 \\ \sum_n k_{1,n} & \text{pour } h > 1 \end{cases}$$

avec $\sum k_{i,n} = 1$

$$\text{et } \gamma_i(h) = \begin{cases} \sum_n k_{i,n} \left(\frac{h}{a^i}\right)^n & \text{pour } h \leq a^i \\ \sum_n k_{i,n} & \text{pour } h > a^i \end{cases}$$

on trouve un semi-variogramme résultant:

$$\gamma(h) = \sum_{i=0}^{\infty} \gamma_i(h) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} k_{i,n} \left(\frac{h}{a^i}\right)^n$$

On montre que cette série est absolument convergente et que $\gamma(h)$ tend vers une fonction de DE WIJS de dispersion $3\alpha = \frac{1}{\log a}$. Pour $i = 3$ déjà la courbe $\gamma(h)$ tracée sur un papier semi-logarithmique s'écarte à peine d'une droite.

D'une façon générale, la fonction $\gamma(h)$ est paire:

$$\gamma(h) = \gamma(-h) > 0.$$

Le comportement de $\gamma(h)$ au voisinage de l'origine donne des indications sur la régularité de la variation de la teneur elle-même [9, 70, 71]. En particulier, si $\gamma(0) \neq 0$ on a un effet de pépite. L'école française explique l'effet de pépite par l'existence d'une transition à une échelle beaucoup plus petite que celle adoptée pour h [48, 71].

Pour les applications à l'estimation, le gisement doit être isotrope. On peut également traiter quelques cas simples pour lesquels $\gamma(h)$ dépend de la direction. Une anisotropie est géométrique, si on revient au cas isotrope en choisissant une unité de longueur variable en fonction de la direction. On peut également envisager des anisotropies zonales comme par exemple dans le cas hypothétique d'un gisement parfaitement stratifié et régulier, caractérisé par un $\gamma(h)$ horizontal et un $\gamma(z - z_0)$ vertical. On

peut supposer a priori que les anisotropies réelles sont beaucoup plus complexes; la condition d'isotropie est une limitation importante aux applications de la géostatistique.

Considérons une V.R. $T(r)$ dans un gisement V . La teneur moyenne du gisement est:

$$\bar{T} = \frac{1}{V} \int_V T(r) dV$$

et, d'une façon plus générale, si on utilise un facteur de pondération $p(r)$

$$\bar{T} = \int_V p(r) T(r) dV \quad \text{avec} \quad \int_V p(r) dV = 1$$

Prélevons dans le gisement n échantillons ponctuels. La teneur moyenne de ces échantillons est, compte tenu d'un facteur de pondération L_i ,

$$\bar{T}^* = \sum L_i T(r_i) \quad \text{avec} \quad \sum L_i = 1$$

L'erreur commise en adoptant \bar{T}^* comme estimateur de T est:

$$\bar{T}^* - \bar{T} = \sum L_i T(r_i) - \int_V p(r) T(r) dV$$

Si l'on considère tous les ensembles possibles de n échantillons, leur teneur moyenne sera \bar{T} et donc $E(\bar{T}^* - \bar{T}) = 0$.

La variance de $\bar{T}^* - \bar{T}$, qui est aussi la moyenne de $(\bar{T}^* - \bar{T})^2$, représente l'erreur commise lorsqu'on étend à tout le gisement la teneur moyenne de n échantillons quelconques. On peut montrer [44, 48] que cette variance, appelée *variance d'extension* de \bar{T}^* à \bar{T} , vaut:

$$\sigma^2(\bar{T}^* - \bar{T}) = 2 \sum_i \int_V L_i p(r) \gamma(r - r_i) dV - \int_V \int_V \gamma(r - r^1) dV dV^1 - \sum_{i,j} L_i L_j \gamma(r_i - r_j) \quad (33, A)$$

Dans le cas particulier de moyennes arithmétiques simples cette relation se réduit à:

$$\sigma^2(\bar{T}^* - \bar{T}) = \frac{2}{nV} \sum_{i=1}^n \int_V \gamma(r - r_i) dV - \frac{1}{V^2} \int_V \int_V (r - r^1) dV dV^1 - \frac{1}{N^2} \sum_{i,j=1}^N \gamma(r_i - r_j) \quad (33, B)$$

Dans ces expressions, les points r et r^1 décrivent tous les deux le volume V du gisement.

Par sa définition même le variogramme représente la variance d'extension à $T(r + h)$ de la teneur ponctuelle $T(r)$.

Voyons ce que devient la fonction $\gamma(h)$ lorsque, comme cela se passe en réalité, on prélève des échantillons non ponctuels de volume v c'est-à-dire recherchons l'expression mathématique de la fonction régularisée $\gamma_t(h)$. La nouvelle variable régionalisée sera la teneur moyenne de l'échantillon $\frac{1}{v} \int_v T(r) dr$ et la teneur T sera donnée par (25).

La formule (33) devient dans ce cas:

$$\gamma_t(h) = \frac{1}{V^2} \int_V dV_1 \int_V \gamma(r) dV_2 - \frac{1}{v^2} \int_{v_1} \int_{v_2} \gamma(r) dv_2 = \\ A - \frac{1}{v^2} \int_v dv_1 \int_v \gamma(r) dv_2$$

La fonction $\gamma_t(h)$ régularisée est donc, à une constante près, égale à la moyenne de la fonction ponctuelle $\gamma(r)$ lorsque les extrémités r_1 et r_2 du vecteur $\bar{r} = \bar{r}_1 - \bar{r}_2$ décrivent séparément deux volumes identiques v distants de h .

Comme dans le cas du covariogramme transitif, la fonction régularisée $\gamma_t(h)$ est beaucoup plus régulière que $\gamma(h)$. Il y a un effet de polissage. En effet, le facteur de pondération est dans ce cas $\frac{1}{v} k(r)$ où $k(r)$ est la variable géométrique associée à v .

Dans le cas particulier du schéma de DE WIJS (formule 32) et dans l'espace à une dimension (16) on trouve:

$$\gamma_t(h) = 3(\log h + 3/2).$$

Il est à noter que ce schéma n'est valable que pour des échantillons de volume v . Pour des échantillons ponctuels, on a

$$\gamma(0) = -\infty.$$

(16) Les demi-variogrammes expérimentaux sont calculés le long de lignes.

Remarque: Les formules de la géostatistique restent les mêmes lorsque on remplace les teneurs ponctuelles par les teneurs moyennes des échantillons. Nous représenterons par la suite par $T(r)$ ou T_{ij} les teneurs et par $\gamma(h)$ la fonction intrinsèque, étant bien entendu qu'il s'agit de teneurs moyennes d'échantillons et de la fonction γ_t régularisée.

La formule 33 permet de calculer la variance $\sigma^2(T)$ des teneurs des échantillons de volume v prélevés dans un gisement de volume V . Cette variance n'est rien d'autre que la variance de l'extension de la teneur du volume v au volume V . Sans entrer dans le détail des calculs, notons que lorsqu'on admet que le gisement est formé d'un empilement parfait de volume v on trouve [44, 48]:

$$\sigma^2(T) = \frac{1}{V^2} \int_V dV_1 \int_V \gamma(r) dV_2 - \frac{1}{v^2} \int_v dv_1 \int_v \gamma(r) dv_2$$

Un cas particulier intéressant est celui du schéma de DE WIJS (formule 32). Supposons que les volumes v et V sont géométriquement semblables $V = \lambda^3 v$. Les volumes dv_1 et dv_2 seront distants de r dans v et les volumes dV_1 et dV_2 de λr dans V . On a:

$$dV_1 = \lambda^3 dv_1 \quad dV_2 = \lambda^3 dv_2 \quad \text{et}$$

$$\frac{1}{V^2} \log \lambda r dV_1 dV_2 = \frac{1}{v^2} (\log r + \log \lambda) dv_1 dv_2$$

$$\begin{aligned} \sigma^2(T) &= \frac{3\alpha}{V^2} \int_V dV_1 \int_V \log \lambda r dV_2 - \frac{3\alpha}{v^2} \int_v dv_1 \int_v \log r dv_2 \\ &= \frac{3\alpha}{v^2} \int_v dv_1 \int_v \log \lambda dv_2 = 3\alpha \log \lambda = \alpha \log \frac{V}{v} \end{aligned} \quad (34)$$

On retrouve ainsi la formule (6) que DE WIJS avait établie en suivant un raisonnement bien différent.

On voit le grand avantage du schéma De Wijsien qui ramène (à la détermination de la constante α près) le problème de l'estimation à des problèmes géométriques. Qui plus est, on peut toujours remplacer, pour le calcul de la variance, les échantillons de

volume v prélevés dans un gisement V par des échantillons de longueur m prélevés sur une droite M ; il suffit de choisir m et M de façon à avoir $\log \frac{V}{v} = 3 \log \frac{M}{m}$ (35).

On trouve dans les ouvrages de MATHERON [45, chap. 3 et 48 p. 245] des formules permettant de calculer les « équivalents linéaires » de nombreuses formes géométriques simples.

Avant de passer à la technique d'estimation, le Krigeage, indiquons que, pas plus que dans le cas général, le problème de la corégionalisation c'est-à-dire de l'estimation de deux ou plusieurs V.R. (p.ex. teneur et volume) dans un même gisement n'a reçu de solution satisfaisante. Comme dans le cas général, on doit distinguer une dépendance interne et une dépendance différée et on peut formuler les conditions d'indépendance. Mais, lorsqu'il s'agit d'applications pratiques, les formules proposées [44, chap. 13] sont celles du calcul élémentaire des erreurs de mesures indépendantes.

6.1.4. *Le Krigeage*

Considérons un gisement de volume V à l'intérieur duquel la teneur est une V.R. $T(r)$. Appelons $p(r)$ le facteur de pondération des teneurs.

La teneur moyenne du gisement est:

$$\bar{T} = \int_V p(r) T(r) dV$$

ou, plus simplement

$$\bar{T} = \frac{1}{V} \int_V T(r) dV$$

On dispose d'une série (continue ou discontinue) d'échantillons (17) prélevés dans un volume V^1 (qui ne coïncide pas nécessairement avec V). La teneur moyenne estimée à partir de ces échantillons et d'un facteur de pondération L vaut:

(17) Ponctuels ou non. Nous venons de voir que les formules géostatistiques restent les mêmes lorsqu'on remplace la teneur ponctuelle par la teneur de l'échantillon et $\gamma(h)$ par la fonction régularisée.

$$\bar{T}^* = \int_{V^I} L(r) T(r) dV^I \text{ (cas continu)}$$

$$\text{ou } \bar{T}^* = \sum_i L_i T_i \text{ (cas discontinu)} \quad (36)$$

La variance de cette estimation, que l'on note σ_n^2 , est donnée par la formule (33).

Le *Krigeage* est une méthode de calcul du facteur de pondération L qui rend la variance d'estimation minimum. Il appartient à la famille des techniques d'estimation dites à implantation fixe et champ flottant.

On considère que le gisement n'est qu'une partie d'un gisement beaucoup plus grand (18). Pour le calcul, on conserve la position des échantillons et on déplace le gisement dans toutes les positions possibles. A cause de cette flottaison, la teneur T n'est plus constante mais devient elle-même une V.R.

Lors d'une estimation, la variance σ_n^2 résulte de la superposition des erreurs que l'on commet en étendant aux lignes les teneurs des points de prélèvement, celles des lignes (supposées connues) aux surfaces et celle des surfaces au gisement tout entier. En géostatistique, on admet que ces erreurs sont indépendantes (19). Le problème de l'estimation peut ainsi être toujours ramené à l'espace à une dimension.

Prenons le cas simple d'une droite de longueur M sur laquelle on a prélevé n échantillons de longueur m répartis d'une façon homogène. Les points de prélèvement ont $x_i = \left(i - \frac{1}{2}\right) \frac{M}{n} = \left(i - \frac{1}{2}\right) a$ avec: $a = \frac{M}{n}$ = zone d'influence d'un prélèvement (20).

(18) La théorie intrinsèque nous y autorise.

(19) On lira à la page 198 de [48] les arguments de MATHERON en faveur de cette hypothèse.

(20) En géostatistique, la zone d'influence est définie comme une portion du gisement à l'intérieur de laquelle on a prélevé ou non des échantillons et dont la teneur moyenne est calculée par Krigeage. Dans le cas examiné, cette définition coïncide avec celle communément admise et que nous avons p.ex. utilisée pour délimiter les zones d'influence représentées sur la figure 2. Par la suite, nous utiliserons ce terme dans le sens géostatistique et une zone d'influence pourra contenir les points de prélèvement de 1 ou plusieurs échantillons ou ne pas en contenir du tout (zone d'influence vide ou à configuration lacunaire).

Adoptons pour estimateur de la teneur moyenne \bar{T} la valeur:

$$\bar{T}^* = \frac{1}{n} \sum T_i$$

Selon la technique adoptée, \bar{T} et \bar{T}^* sont des variables régionalisées. Elles ont bien sûr la même moyenne $E(\bar{T}^* - \bar{T}) = 0$.

La variance de $\bar{T}^* - \bar{T}$ sera la variance de l'estimation. Elle vaut:

$$\begin{aligned} \sigma_n^2 = \sigma^2(\bar{T}^* - \bar{T}) &= \sigma^2(\bar{T}) - 2 \text{cov}(\bar{T}, \bar{T}^*) + \sigma^2(\bar{T}^*) = \\ &= \frac{1}{n} \sigma(T_i) + \frac{2}{n^2} \sum_{i < j} \text{cov}(T_i, T_j) - \\ &= \frac{2}{n} \sum_i \text{cov}(T_i, \bar{T}) + \sigma^2(\bar{T}) \quad (37) \end{aligned}$$

Pour calculer les variances et covariances figurant dans (37), MATHERON introduit deux fonctions auxiliaires:

$\chi(h) = \frac{1}{h} \int_0^h \gamma(x) dx$ = moyenne de $\gamma(x)$ lorsque x est la distance d'un point quelconque d'un segment de longueur h à l'une de ses extrémités

$F(h) = \frac{2}{h^2} \int_0^h x \chi(x) dx = \frac{2}{h^2} \int_0^h (h-x) \gamma(x) dx$ = moyenne de $\gamma(x)$ lorsque x est la distance de deux points quelconques sur un segment de longueur h .

Nous ne donnerons pas les détails des calculs. Indiquons le résultat final:

$$\begin{aligned} \sigma_n^2 &= \frac{n}{4} \left[\frac{1}{2} \chi\left(\frac{a}{2}\right) + \frac{3}{2} \chi\left(\frac{3a}{2}\right) + \dots + \right. \\ &= \left. \frac{2n-1}{2} \chi\left(\frac{2n-1}{2} a\right) \right] - F(M) - \frac{1}{n^2} [n F(m) + \\ &= 2(n-1) \gamma(a) + 2(n-2) \gamma(2a) + \dots + 2 \gamma[(n-1)a]] \quad (38) \end{aligned}$$

Si on n'avait qu'un seul échantillon central, cette formule se réduit à $\sigma_E^2 =$ variance d'extension de la teneur T_1 de l'échantillon central de longueur m à toute la droite de

$$\text{longueur } M = 2 \chi \left(\frac{M}{2} \right) - F(M) - F(m).$$

Cette formule est assez compliquée. Elle devient simple lorsqu'on a un schéma De Wijsien (formule 32), qui nous ramène naturellement à un problème géométrique:

$$\chi(h) = \frac{1}{h} \int_0^h 3 \alpha \log x \, dx = 3 \alpha [\log h - 1]$$

$$F(h) = \frac{2}{h^2} \int_0^h 3 \alpha (h - x) \log x \, dx =$$

$$\frac{6}{h^2} \left[h \log x - hx - \frac{1}{2} x^2 \log x + \frac{1}{2} x^2 \right]_0^h = 3 \left[\log h - \frac{3}{2} \right]$$

La variance d'extension d'un échantillon central à sa zone d'influence vaut dans ce cas:

$$\sigma_E^2 = 3 \alpha \left[\log \frac{M}{m} - 1 - 2 \log 2 \right] \quad (38)$$

Remarquons une intéressante propriété du schéma de DE WIJS: La variance d'extension d'un échantillon central (38) est inférieure à la variance de la teneur de cet échantillon dans sa zone d'influence (35).

On peut écrire une formule analogue à (38) en composant les variances d'extension des échantillons centraux. Appelons \bar{T}_1 la teneur de la zone d'influence de l'échantillon i . On a:

$$\bar{T}^* - \bar{T} = \sum_i (T_i - \bar{T}_i)$$

et

$$\sigma_n^2 = \frac{1}{n} \sigma_E^2 + \frac{2}{N^2} \sum_{i < j} \text{Cov} [(T_i - \bar{T}_i), (T_j - \bar{T}_j)]$$

En pratique, on néglige les covariances d'extension et on écrit:

$$\sigma_n^2 = \frac{1}{n} \sigma_E^2$$

Cette approximation n'est pas toujours acceptable [48, p. 199].

Examinons maintenant le problème général du Krigeage. Le gisement est reconnu par n échantillons; la teneur moyenne dans une zone d'influence est estimée par la formule (36) et on cherche les valeurs des L_i qui rendent la variance de cette estimation minimum. Cette variance sera donnée par:

$$\sigma^2(\bar{T}^* - \bar{T}) = \sigma^2(\bar{T}) - 2 \sum_i L_i \text{Cov}(\bar{T}, T_i) + \sum_i L_i \sigma^2(T_i) + 2 \sum_{i < j} L_i L_j \text{Cov}(T_i, T_j)$$

Pour chercher le minimum de cette fonction liée par $\sum L_i = 1$ on considère la fonction de Lagrange $\sigma^2(\bar{T}^* - \bar{T}) - \mu \sum L_i$ dont les n dérivées par rapport aux L_i doivent être nulles. On aura $(n + 1)$ équations:

$$L_i \sigma^2(T_i) + \sum_{i < j} L_j \text{Cov}(T_i, T_j) = \mu + \text{Cov}(\bar{T}, T_i) \\ \sum L_i = 1$$

Considérons chacune des $n - 1$ premières équations (dans lesquelles on remplace L_n par $1 - \sum_{j=1}^{n-1} L_j$) et la n^e

$$L_i \sigma^2(T_i) + \sum_{j (\neq i) = 1}^{n-1} L_j \text{cov}(T_i, T_j) + \text{cov}(T_i, T_n) - \sum_{j=1}^{n-1} \text{cov}(T_i, T_n) L_j = \mu + \text{cov}(\bar{T}, T_i)$$

$$\sigma^2(T_n) - \sum_{j=1}^{i-1} L_j \sigma^2(T_n) + \sum_{j=1}^{i-1} L_j \text{cov}(T_n, T_j) = \mu + \text{cov}(\bar{T}, T_n)$$

Retranchons membre à membre chaque couple d'équations

$$\sum_{j=1}^{n-1} [\text{cov}(T_i, T_j) - \text{cov}(T_n, T_j) - \text{cov}(T_n, T_i)] L_j = \text{cov}(\bar{T}, T_i) - \text{cov}(\bar{T}, T_n) - \sigma^2(T_n)$$

On a ainsi un système de n équation à n inconnues

$$\sum_{j=1}^{n-1} R_{1j} L_j = N_{1j} \quad (39)$$

$$\sum_{j=1}^n L_j = 1$$

dont la solution est aussi la solution du problème du Krigeage.

La variance de cette estimation s'appelle variance de Krigeage. Elle vaut:

$$\sigma_k^2 = \sigma^2(\bar{T}) - 2 \text{Cov}(\bar{T}, T_n) + \sigma^2(T_n) - \sum_{j=1}^{n-1} L_j N_j \quad (40)$$

Le dernier terme représente l'amélioration de la variance de Krigeage par rapport à la variance d'extension obtenue lorsqu'on adopte comme estimateur d'une zone d'influence la teneur T_n du prélèvement central.

Considérons deux zones d'influence voisine 1 et 2 qui n'ont pas de partie commune. Les équations (39) donnent les meilleures estimations de leurs teneurs moyennes:

$$T_1^* = \sum L_{1i} T_i \quad \text{et} \quad T_2^* = \sum L_{2i} T_i$$

L'ensemble 1 + 2 a une teneur moyenne vraie:

$$\bar{T}_{1+2} = \frac{V_1}{V_1 + V_2} \bar{T}_1 + \frac{V_2}{V_1 + V_2} \bar{T}_2$$

Voyons ce que donnent les équations (39) du Krigeage pour cet ensemble.

Les coefficients R_{1j} des premiers membres ne changent pas. Les covariances des deuxièmes membres deviennent:

$$\text{Cov}(\bar{T}_{1+2}, T_1) = \frac{V_1}{V_1 + V_2} \text{Cov}(\bar{T}_1, T_1) + \frac{V_2}{V_1 + V_2} \text{Cov}(\bar{T}_2, T_1)$$

On aura donc:

$$L_{i, 1+2} = \frac{V_1}{V_1 + V_2} L_{i,1} + \frac{V_2}{V_1 + V_2} L_{i2}$$

et

$$T^*_{1+2} = \frac{V_1}{V_1 + V_2} T_1^* + \frac{V_2}{V_1 + V_2} T_2^*$$

On exprime cette propriété en disant que les Krigeages complets se superposent.

Le mot « complet » est ajouté, car en pratique on ne krige pas en entier une zone d'influence. On se limite à l'échantillon central (s'il existe) et à une ou deux auréoles d'échantillons prélevés à la périphérie ou à l'extérieur de cette zone. Ces auréoles auront un *effet d'écran* et l'influence d'échantillons plus éloignés devient négligeable.

Prenons comme exemple un cas extrême. Soit, dans un gisement caractérisé par une loi De Wijsienne (formule 32) une zone d'influence circulaire, de rayon R. Supposons que la teneur moyenne t de la périphérie soit parfaitement connue.

Adoptons comme estimateur de la teneur moyenne \bar{T} du cercle la teneur t

$$\bar{T}^* = t$$

La variance d'extension vaut:

$$\sigma_E^2 = \sigma^2(t - \bar{T}) = \sigma^2(\bar{T}) - 2 \text{Cov}(t, \bar{T}) + \sigma^2(t)$$

On démontre [44, pp. 86-88] que:

$$\sigma^2(t) = \text{Cov}(t, \bar{T}) = A - 3 \alpha \log R$$

et

$$\sigma^2(\bar{T}) = A - 3 \alpha \left(\log R - \frac{1}{4} \right)$$

donc:

$$\sigma_E^2 = \frac{3}{4} \alpha$$

Prélevons une série d'échantillons extérieurs au cercle, de teneur moyenne T et krigeons en tenant compte de t et de \bar{T} .

L'estimation de la teneur moyenne du cercle sera donnée par (36)

$$\bar{T}^* = L T + (1 - L) t$$

avec, selon (40):

$$L = \frac{\sigma^2(t) + \text{Cov}(T, \bar{T}) - \text{Cov}(t, \bar{T}) - \text{Cov}(T, t)}{\sigma^2(t) + \sigma^2(T) - 2 \text{Cov}(T, t)} = \frac{\text{Cov}(T, \bar{T}) - \text{Cov}(T, t)}{\sigma^2(t) + \sigma^2(T) - 2 \text{Cov}(T, t)}$$

On démontre que $\text{Cov}(T, \bar{T}) = \text{Cov}(T, t)$ et donc

$$L = 0 \quad \bar{T}^* = t \quad \text{et} \quad \sigma_K^2 = \sigma_E^2 = \frac{3}{4} \alpha$$

Le Krigeage n'améliore pas l'estimation. L'effet d'écran est total.

Si, en même temps que la teneur moyenne de la périphérie, on connaissait les teneurs t_i d'arcs successifs, cette connaissance n'améliore pas l'estimation de la teneur moyenne du cercle. (Théorème du Statisticien Déçu).

Notons que, puisque $\log r$ est une fonction harmonique, ce théorème n'est que la traduction en prospection du problème de Dirichlet.

Remarquons une nouvelle propriété importante du schéma de DE WIJS: puisque, une fois la teneur de la périphérie fixée, il y a absence totale de corrélation entre les teneurs à l'intérieur et à l'extérieur du cercle, ce schéma est markovien.

Comme pour un schéma De Wijsien le calcul des variances et des covariances se ramène (à la détermination de la dispersion absolue α près) à des problèmes géométriques, le Krigeage peut aussi toujours être ramené à un problème géométrique. On trouve dans le « Traité de Géostatistique Appliquée » de MATHERON [44, ch. VIII et 45, ch. II] de nombreux exemples de Krigeage de zones d'influence carrées.

Les considérations précédentes peuvent être transposées dans le cas du *Krigeage continu*, par exemple lors d'une reconnaissance

par puits et galeries. Lorsqu'on se déplace le long d'une ligne C l'estimateur de la teneur sera:

$$\bar{T}^* = \int_C L(s) T(s) ds \quad \text{avec} \quad \int_C L(s) ds = 1$$

La variance d'estimation sera:

$$\sigma_n^2 = \sigma^2(\bar{T}^* - \bar{T}) = \sigma^2(\bar{T}) - 2 \int_C L(s) \text{Cov}[T(s), \bar{T}] dS + \int_C ds \int_C L(s) L(s') \text{Cov}[T(s), T(s')] ds'$$

La meilleure estimation \bar{T}^* sera fournie par le Krigeage c'est-à-dire par la fonction de pondération $L(s)$ solution des équations intégrales

$$\int_C L(s) \text{Cov}[T(s), T(s')] ds = \text{Cov}[T(s'), \bar{T}] + \lambda$$

et

$$\int_C L(s) ds = 1$$

Nous ne poursuivrons pas l'exposé de la théorie de MATHERON dans ce domaine, puisqu'elle n'intéresse plus Bukena.

6.1.4. *Analyse des tendances et Krigeage*

Un des derniers ouvrages de MATHERON [49] est consacré à l'efficacité de l'estimation de la teneur moyenne par l'analyse des tendances. Il conclut que, à des cas particuliers près, l'ajustement par la méthode des moindres carrés conduit à une estimation non optimale de la teneur moyenne. Trois arguments sont principalement avancés:

a) L'analyse des tendances est utilisée pour résoudre un grand nombre de problèmes et comme toute méthode passe-partout elle ne conduit pas, dans chaque cas particulier, au meilleur résultat. Ainsi par exemple elle ne peut pas donner à la fois la meilleure image de la variation de la teneur $T(r)$ dans un gisement et la meilleure estimation de la moyenne.

L'argument paraît faible, mais nous avons vu qu'à Bukena par exemple un ajustement polynomial sur tout le gisement convient

mal pour estimer les teneurs moyennes de zones particulières ou de tranches de teneurs.

b) MATHERON rejette la possibilité de représenter une structure naturelle par une expression polynomiale. On peut bien sûr répondre que le Krigeage est lui-même un ajustement linéaire et que la nature ignore également les combinaisons de ce type.

c) Le troisième argument fait appel à la notion de V.R. Si la teneur $T(r)$ est une V.R., c'est-à-dire une réalisation d'une fonction aléatoire, les coefficients L_{ij} de l'ajustement polynomial sont eux-mêmes des V.R. de sorte que les valeurs numériques calculées ne sont que des estimateurs L^*_{ij} des grandeurs inconnues L_{ij} . Ces estimateurs sont non biaisés mais pas nécessairement les plus efficaces.

En plus, la différence $L^*_{ij} - L_{ij}$ est systématiquement plus faible aux points de prélèvement, c'est-à-dire la variance des résidus est beaucoup plus faible que la variance réelle de l'estimation.

Cet argument semble trop abstrait (et le développement mathématique de MATHERON l'est beaucoup plus). Toutefois, on ne peut manquer d'être impressionné par l'exemple (unique, il est vrai) qu'il cite.

Bien des critiques peuvent être adressées au Krigeage lui-même. Il n'est applicable que lorsque les teneurs obéissent à des schémas intrinsèques et isotropes. On peut raisonnablement se demander si les gisements remplissent souvent les conditions imposées et en particulier si l'isotropie est une règle assez générale dans la nature.

Pour kriger il faut connaître la fonction $\gamma(h)$ qui, de l'aveu même de MATHERON, ne peut être déterminée avec précision qu'au voisinage de l'origine. Bien plus, les seules formules pratiques accessibles sont celles correspondant au schéma de DE WIJS [45]. Ce schéma introduit des simplifications importantes de calculs mais ne peut être considéré que comme une idéalisation pas toujours acceptable. Il est vrai que SERRA a établi des formules pour des schémas transitifs, mais ses travaux n'ont pas été publiés; on ne trouve dans la littérature [68] que quelques exemples très particuliers de Krigeage de schémas transitifs.

Les géostatisticiens négligent la prospection. A l'exception des très beaux travaux de SERRA [70, 71] l'influence des facteurs géologiques, qui préoccupent les chercheurs de Denver, est souvent

passée sous silence. Il suffit de comparer la présentation des travaux des deux écoles (dans les C.R. du congrès de Montréal, par exemple) pour comprendre toute la différence. Il est juste d'ajouter que MATHERON [44, chap. 14] examine la question de populations non homogènes (21) mais comme un phénomène secondaire.

Le principal reproche que l'on peut faire à la géostatistique (comme à l'analyse des tendances) est qu'elle est une méthode a posteriori. Pour calculer des fonctions $\gamma(h)$ et pour kriger on a besoin d'un très grand nombre de résultats expérimentaux et les premières conclusions atteindront le prospecteur (surtout dans une région isolée) beaucoup trop tard.

Des résultats d'applications du Krigeage à l'estimation de gisements réels n'ont jamais été présentés et les exemples sur modèles reconstitués [67] ont une valeur didactique indiscutable, mais ne peuvent être considérés que comme des plaidoyers pro domo sua.

Ces remarques et critiques faites, il faut insister sur la grande valeur du Krigeage en tant que technique d'évaluation des gisements. Le centre de morphologie mathématique rendrait un grand service aux personnes intéressées à ce problème, en publiant un atlas de formules pratiques et d'exemples de Krigeage.

6.2. Applications à Bukena

6.2.1. Semi-variogrammes expérimentaux

A l'aide de la formule (31, A) nous avons calculé les semi-variogrammes expérimentaux moyens pour les quatre variables étudiées (A , $B = \log A$, T , $W = \log T$) dans les différentes régions représentées sur la figure 3 et dans les directions NS et EW.

Afin d'estimer aussi correctement que possible ces courbes, nous avons, en plus, imposé un certain nombre de contraintes, dont les principales sont:

a) Le nombre de termes intervenant dans la somme doit être élevé (généralement supérieur à 100);

(21) Rappelons que ce problème a été étudié pour la première fois par Baty [3].

b) Le calcul pour un h déterminé est annulé si 5 rangées consécutives de puits (distantes de 25 m) ne fournissent pas de termes à la sommation;

c) Le calcul pour un h déterminé est annulé si une zone importante de la région considérée ne fournit pas de termes à la sommation.

Cette dernière contrainte est assouplie lorsque la région comprend la partie N du gisement (à faible densité de puits).

Malgré ces précautions, des causes d'erreurs systématiques peuvent subsister. Pour une somme par exemple du type:

$$\sum_i \sum_j (T_{i,j+h} - T_{i,j})^2$$

des termes caractérisés par des valeurs de i ou de j variant selon une progression arithmétique peuvent systématiquement ne pas exister sans que le calcul soit annulé.

Nous avons tracé sur les figures 6 à 12 les semi-variogrammes expérimentaux correspondant aux régions pour lesquelles nous avons indiqué les distributions des teneurs et des accumulations (fig. 4 et 5). Comme d'habitude l'unité de longueur est de 25 m.

On peut tirer de nombreuses conclusions:

a) Il y a une anisotropie marquée. Le semi-variogramme moyen NS est systématiquement situé plus haut que la courbe correspondant à la direction WE. Le run, signalé déjà par l'analyse des tendances, est ainsi confirmé. Toutefois, il faut signaler une exception, la région E (fig. 8), qui correspond justement à la partie Nord du gisement (à faible densité de puits). Rappelons (tableau XII, par. 4.3) que cette région est également caractérisée par une accumulation moyenne significativement différente de celle du gisement tout entier.

b) L'anisotropie n'est pas géométrique. Même en se limitant aux petites valeurs de h , des translations d'amplitude constante n'amènent pas la coïncidence des courbes NS et EW. En particulier, les régions B, G et I sont caractérisées (pour les accumulations) par des anisotropies très prononcées. Remarquons que la région G avait également une accumulation moyenne anormalement élevée (tableaux X et XII).

c) A partir d'une valeur relativement faible de h , les semi-variogrammes expérimentaux présentent des fluctuations énormes.

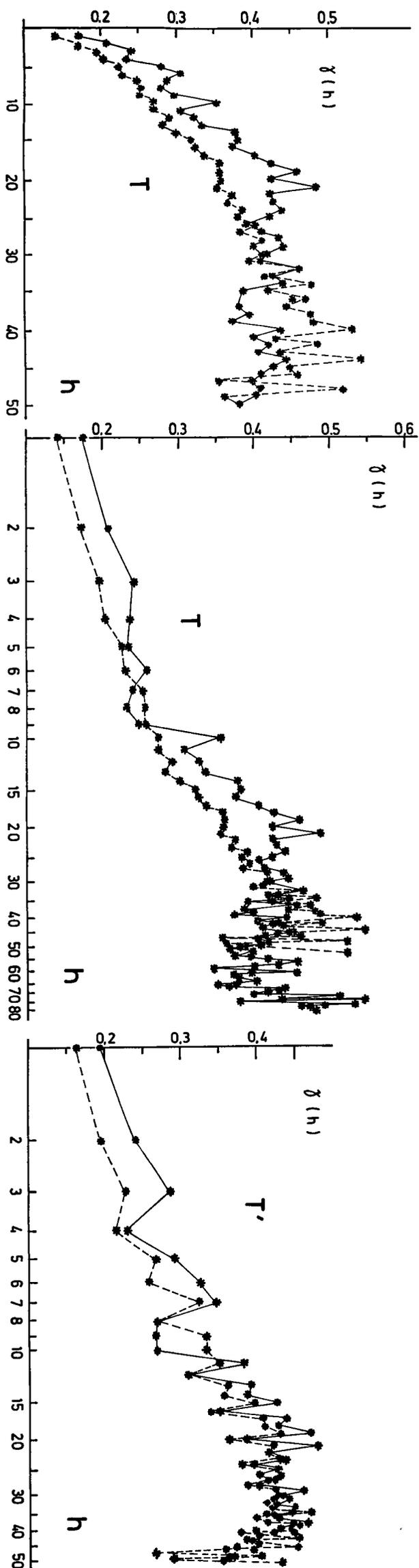
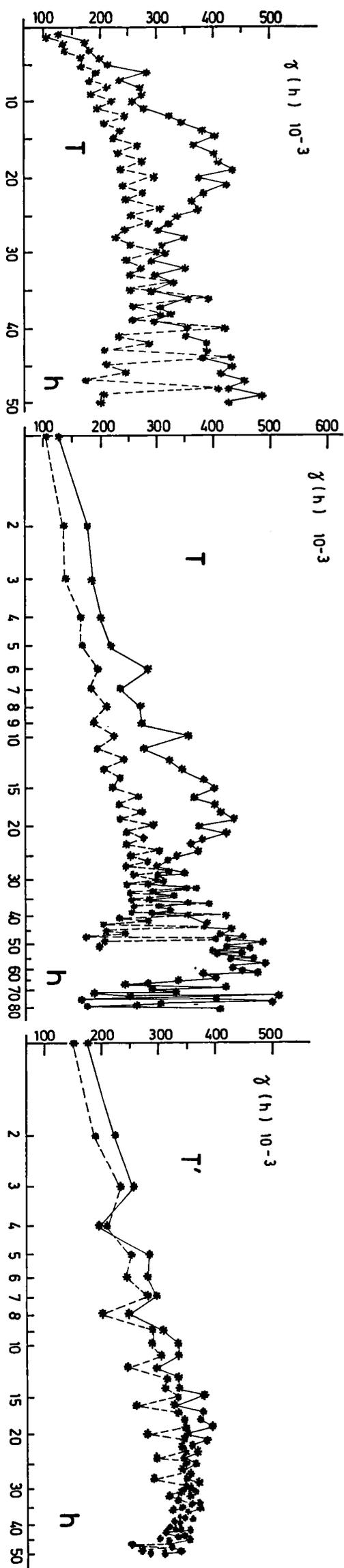


Figure 6 - Semi-variogrammes expérimentaux du gisement entier:
 rangée supérieure: Accumulations A
 rangée inférieure: B = log A

— Direction NS
 — Direction WE
 T: Semi-variogrammes calculés à partir des covariogrammes.

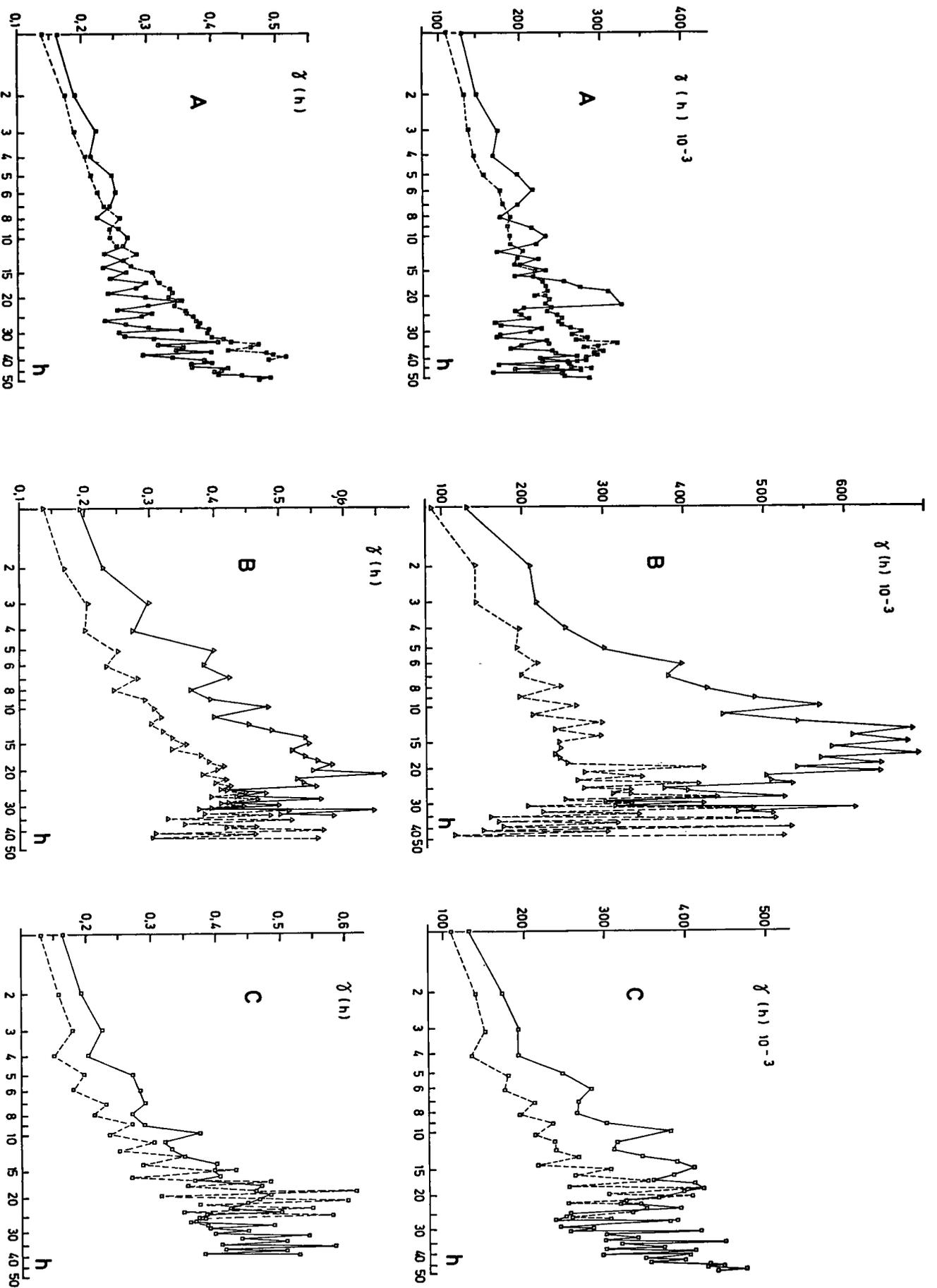


Figure 7 - Semi-variogrammes expérimentaux des parties A, B, C du gisement:

rangée supérieure: Accumulations A

rangée inférieure: B = log A

—— Direction NS

----- Direction WE

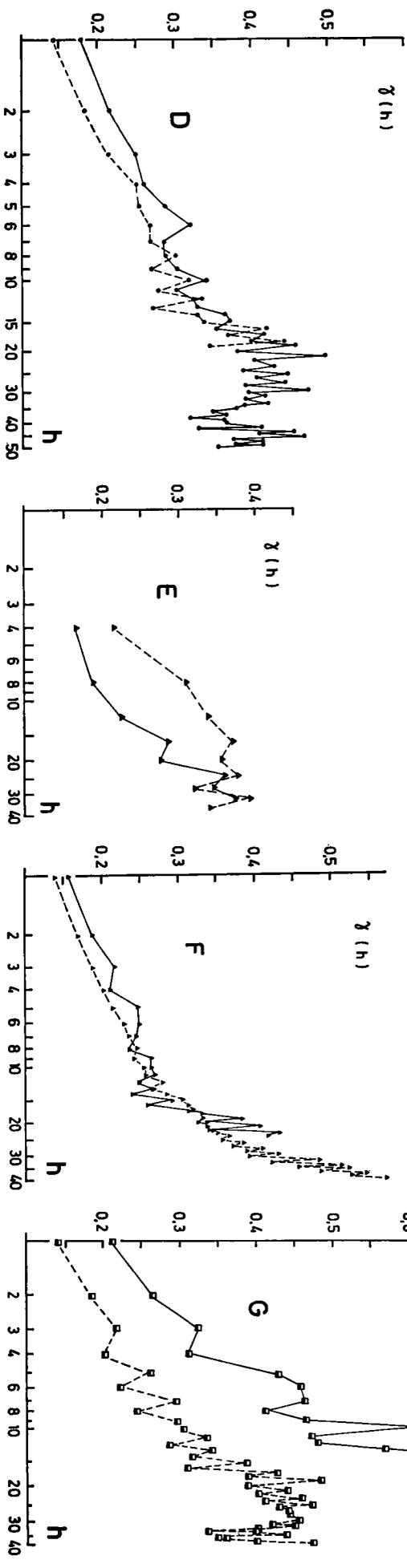
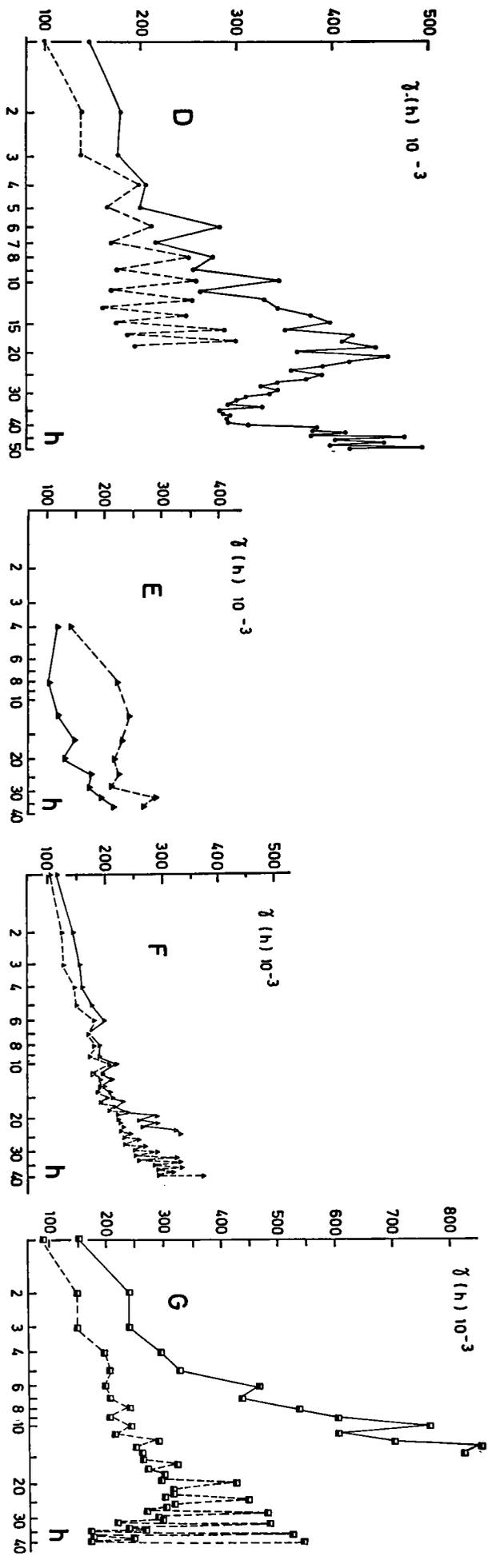


Figure 8 - Semi-variogrammes expérimentaux des parties D, E, F, G du gisement:
rangée supérieure: Accumulations A
rangée inférieure: B = log A

—— Direction NS

----- Direction WE

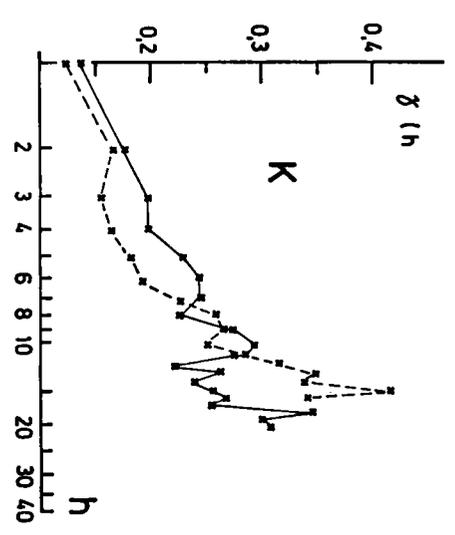
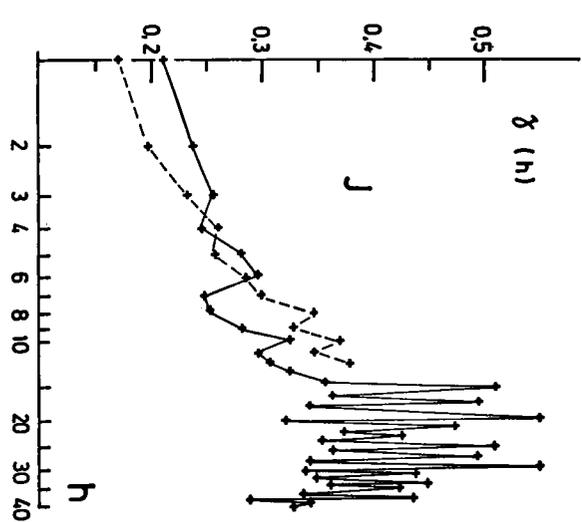
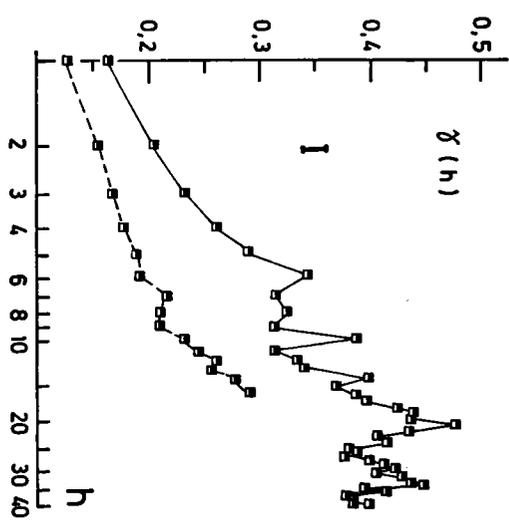
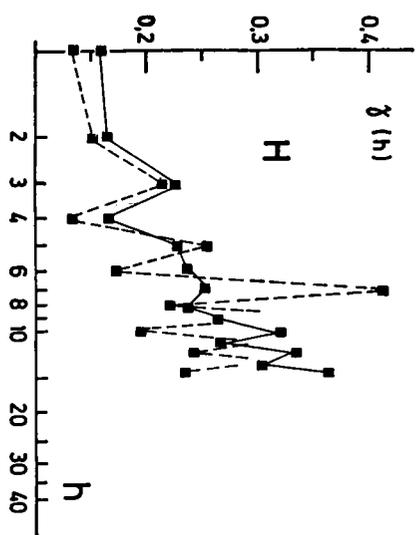
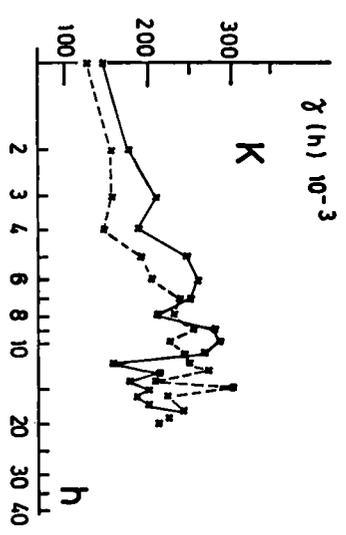
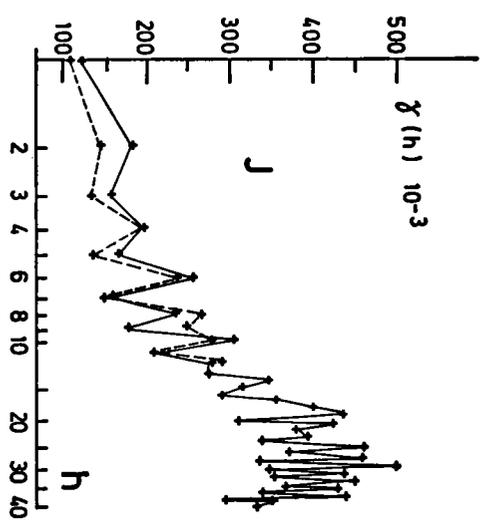
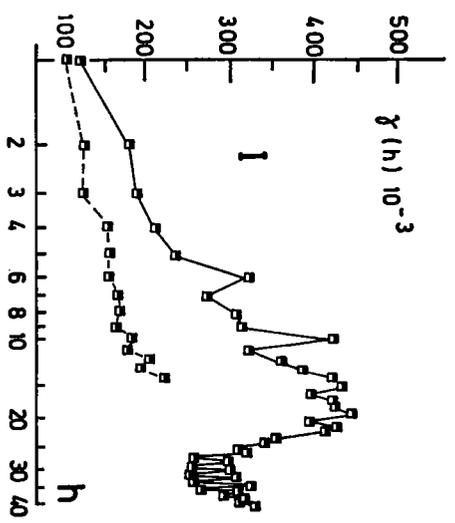
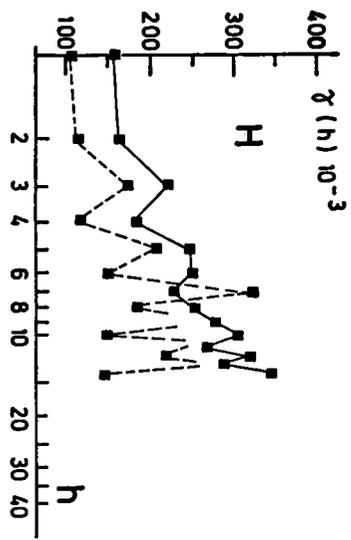


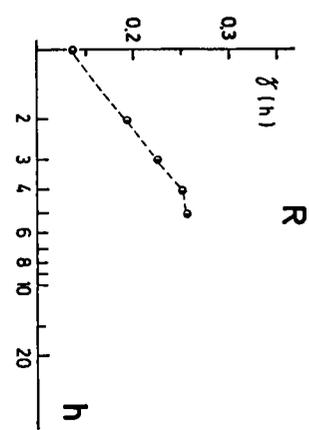
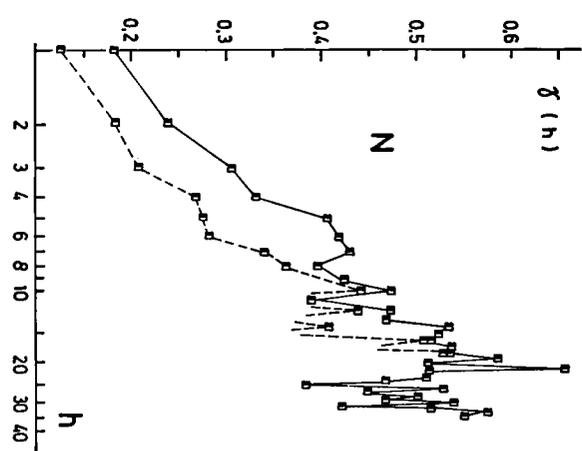
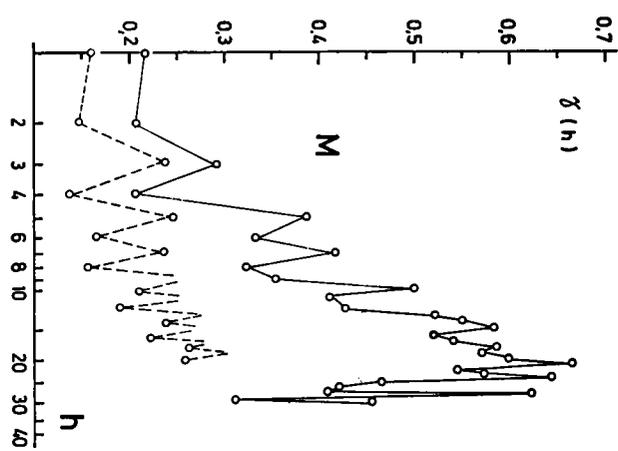
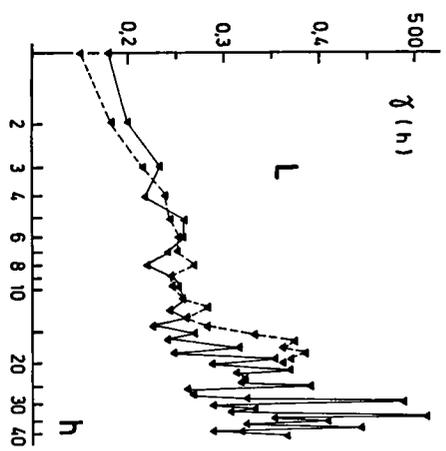
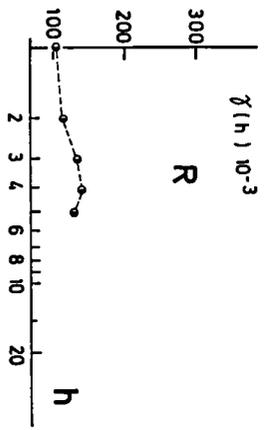
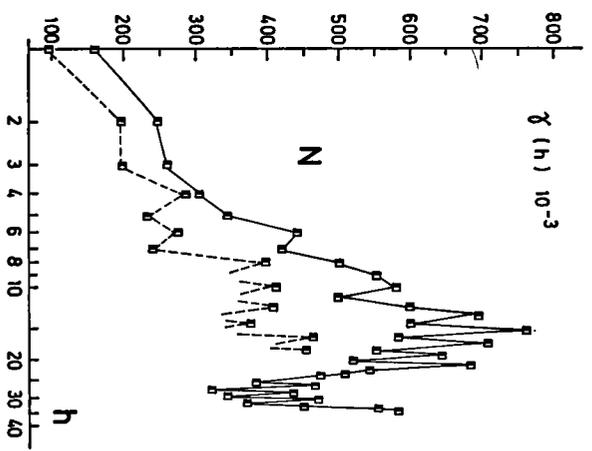
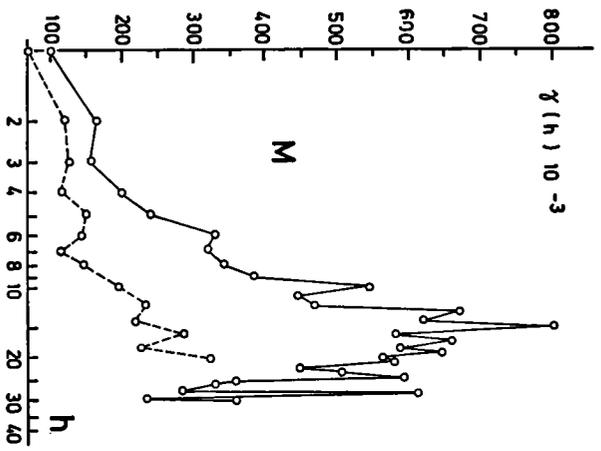
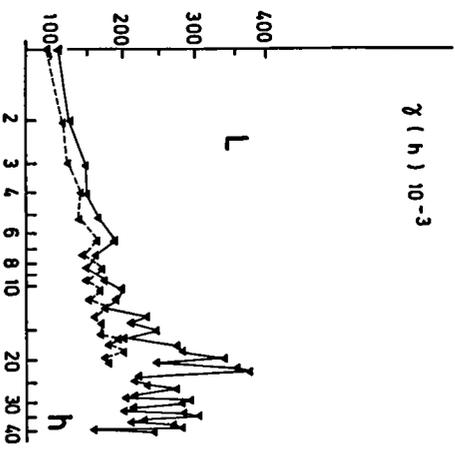
Figure 9 - Semi-variogrammes expérimentaux des parties H, I, J, K du gisement:

rangée supérieure: Accumulations A

rangée inférieure: B = log A

— Direction NS

--- Direction WE



— Direction NS

— Direction WE

Figure 10 - Semi-variogrammes expérimentaux des parties L, M, N, R du gisement:
rangée supérieure: Accumulations A
rangée inférieure: B = log A

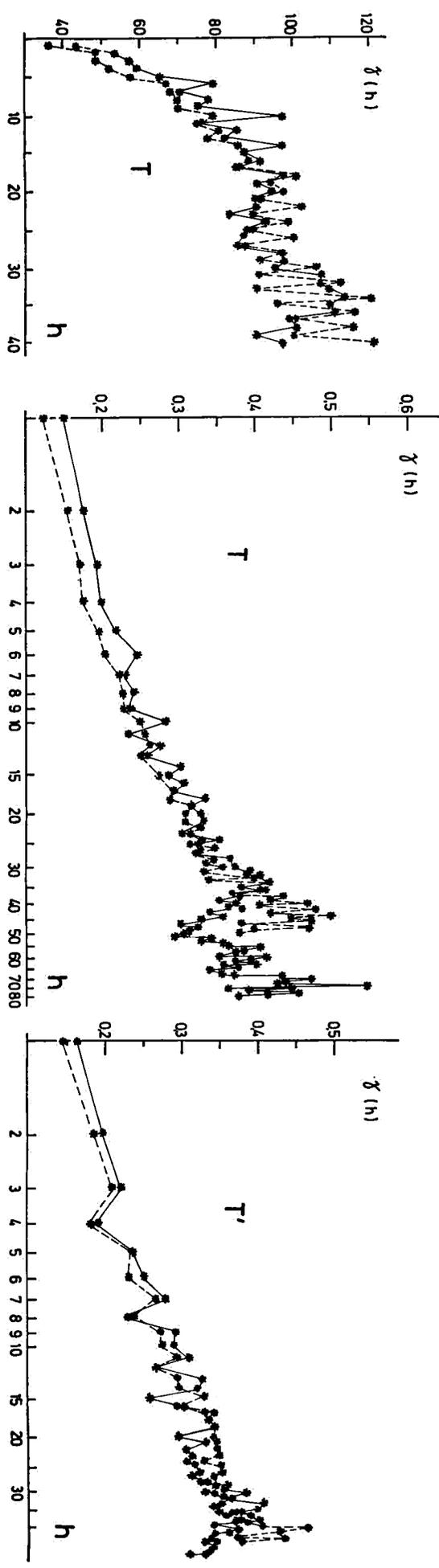
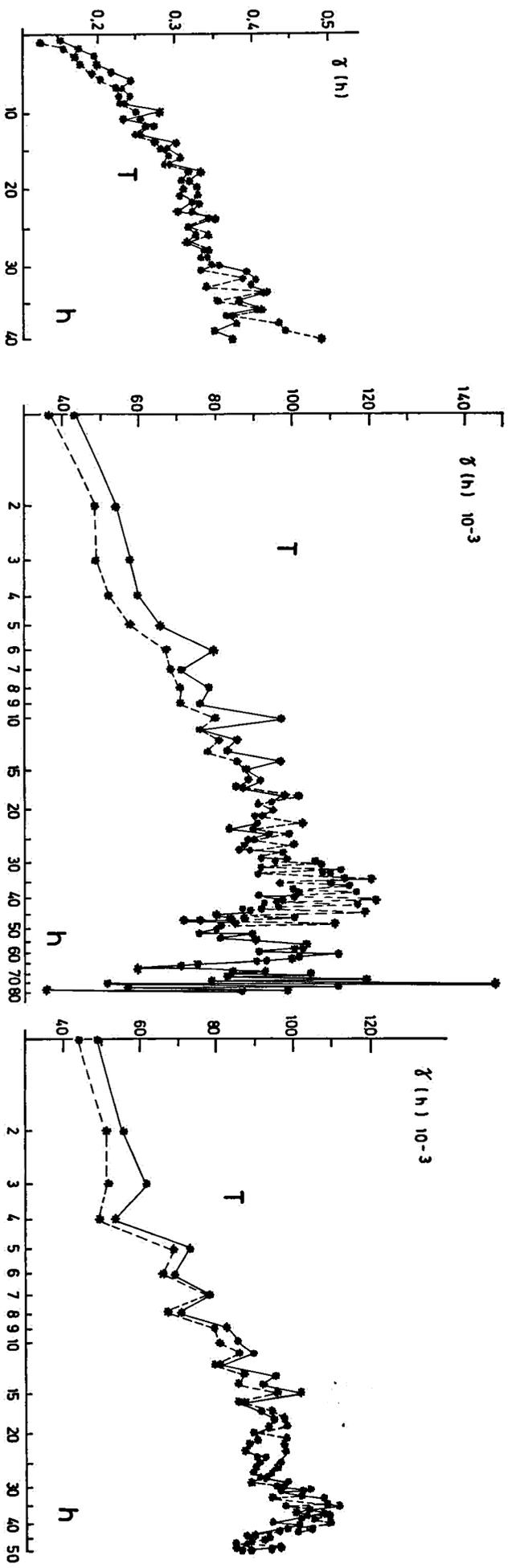


Figure 11 - Semi-variogrammes expérimentaux du gisement entier:

rangée supérieure: Teneurs T

rangée inférieure: W = log T

— Direction NS
 - - - Direction WE
 T': Semi-variogrammes calculés à partir des covariogrammes.

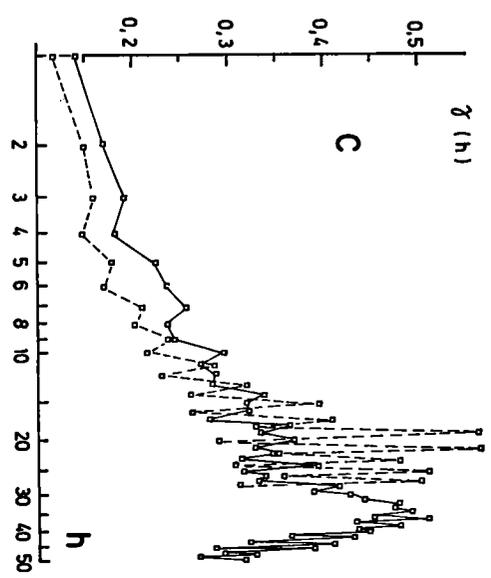
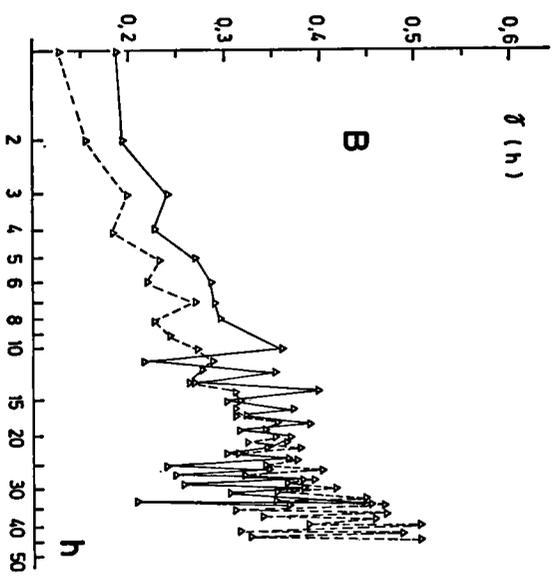
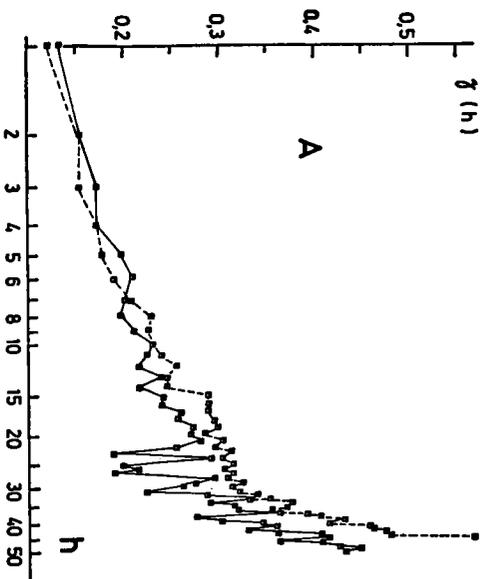
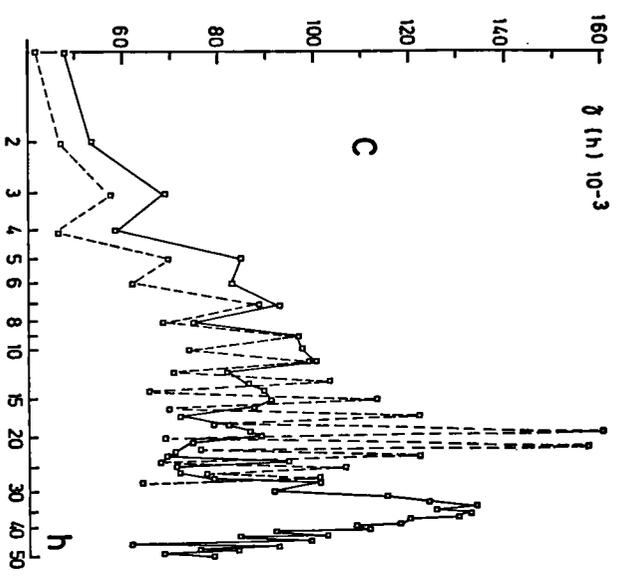
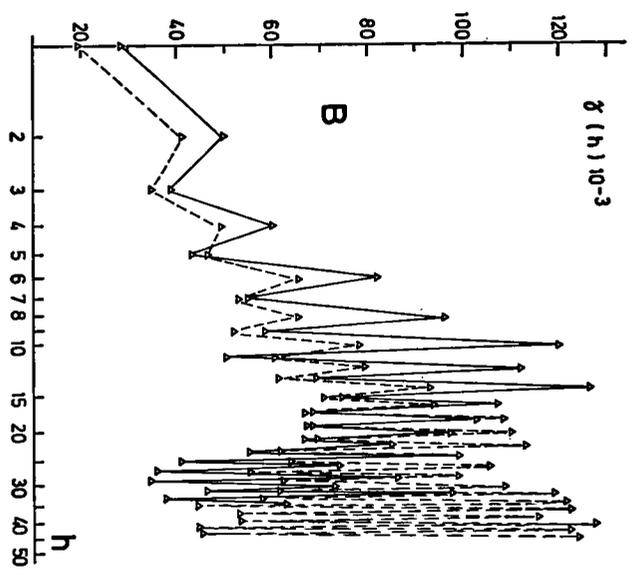
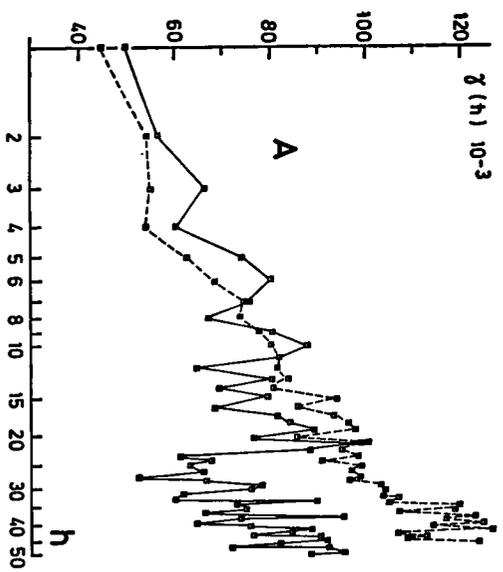


Figure 12 - Semi-variogrammes expérimentaux des parties A, B, C du gisement:
rangée supérieure: Teneurs T
rangée inférieure: W = log T
— Direction NS
--- Direction WE

mes. Nous avons signalé que MATHERON explique ces fluctuations par le biais croissant existant entre la fonction intrinsèque et le semi-variogramme expérimental. Ce même auteur [44, chap. 9] attribue également une certaine importance à la localisation et à la périodicité des extremums. Nous avons relevé systématiquement les positions des maximums et minimums des courbes représentées sur les figures 6 à 12, pour les valeurs de h allant de 2 à 16. L'étude est décevante. Tout ce que l'on peut dire est que leur nombre croît systématiquement avec h . Il y a une exception, $h = 8$, pour laquelle les courbes passent soit par un maximum soit par un minimum (selon la nature de la variable et la direction) indépendamment de la région considérée. On ne peut bien sûr donner aucune explication à cette constatation.

D'autres géostatisticiens [9] attribuent les semi-variogrammes en dents de scie à l'existence de micro-bassins de sédimentation. Cette opinion doit être rejetée pour Bukena. Les fluctuations sont bien dues au biais signalé ci-dessus. En effet, si l'on observe les semi-variogrammes correspondant au gisement tout entier (courbes T des fig. 6 et 11), calculés à partir d'un nombre très élevé de points, on constate que ces courbes sont beaucoup plus régulières.

d) Sur les figures 6 et 11, nous avons tracé des courbes $\gamma(h)$ avec des échelles arithmétiques. On constate qu'il n'y a pas d'effet de pépite à Bukena (ou il est négligeable).

e) Sur ces mêmes figures nous avons tracé les semi-variogrammes calculés à partir des covariogrammes. On vérifiera ainsi aisément que les formules (31A) et (31B) ne sont pas exactement équivalentes.

f) En première approximation, les semi-variogrammes de Bukena peuvent être classés soit dans la famille des transitifs, soit dans la famille des De Wijsien (avec une légère préférence pour les premiers). Indiquons aussi que, si on prolonge ces courbes au-delà de $h = 90$ (22), $\gamma(h)$ croît très rapidement (mais les courbes n'ont alors plus aucune signification).

g) Si on se limite aux premiers points, les semi-variogrammes expérimentaux peuvent être rattachés au schéma de DE WIJS. Pour une région déterminée, les droites NS et EW sont sensiblement parallèles. Toutefois, il y a des exceptions; c'est le cas des

(22) C'est possible pour le gisement entier T.

semi-variogrammes des accumulations pour les régions E et G (23).

Les coefficients angulaires des droites varient sensiblement d'une région à l'autre. (tableau XIX).

Tableau XIX

valeurs extrêmes des dispersions absolues 3α			
variable	3α minimum	3α maximum	3α moyen
accumulations A	$21,1 \cdot 10^3$	$113,8 \cdot 10^3$	$61,7 \cdot 10^3$
B = log A	$44 \cdot 10^{-3}$	$198 \cdot 10^{-3}$	$53 \cdot 10^{-3}$
teneurs T	$10,8 \cdot 10^3$	$19,2 \cdot 10^3$	$14,7 \cdot 10^3$
W = log T	$36 \cdot 10^{-3}$	$61 \cdot 10^{-3}$	$45 \cdot 10^{-3}$

On peut donc dire que, à Bukena, l'hypothèse de dispersion absolue ($\alpha = C^{te}$) n'est pas vérifiée.

On remarquera aussi les faibles valeurs de 3α pour les grandeurs logarithmiques, qui confirment les prévisions de l'étude des distributions.

On pourrait songer à résoudre le problème de l'estimation de la valeur la plus plausible de α en utilisant la variance d'une grandeur X et la formule $\sigma^2(X) = 3\alpha \log \frac{M}{m}$, où M et m sont

« équivalents linéaires » du gisement et des puits, assimilés par exemple à des parallélépipèdes. Or, les limites du gisement sont mal définies et les dimensions des puits (25) sont variables. Nous avons néanmoins appliqué la méthode des « équivalents linéaires » pour les logarithmes des accumulations en faisant diverses hypothèses. On trouve des chiffres variant de $27 \cdot 10^{-3}$ à $123 \cdot 10^{-3}$. La précision n'est donc pas améliorée.

h) Si on observe attentivement les semi-variogrammes, on constate que la pente reste constante jusqu'à $h = 9$ ou 10 et puis aug-

(23) Encore une particularité de ces régions situées aux extrémités N et S du gisement.

(25) Les archives de la Sermikat [69] contiennent des indications à ce sujet.

mente légèrement (en ces points il y a de petites discontinuités angulaires). Il y aurait donc des petites variations de la minéralisation tous les 250 m environ, qui pourraient avoir été provoquées par les deux branches de la Lubenga.

6.2.2. *Krigeage à Bukena*

Les conditions à Bukena sont particulièrement défavorables au Krigeage:

— Le gisement est anisotrope. En cas d'anisotropie géométrique, l'école géostatistique préconise [9, 44, 45] la continuation de la prospection à la maille rectangulaire. C'est une solution peu réaliste et impossible à appliquer, a posteriori, à Bukena. Nous sommes donc obligés de considérer toutes les directions comme équivalentes.

— La minéralisation n'obéit que d'une façon très approximative au schéma de DE WIJS, et de toute façon la dispersion absolue n'est pas constante. Pourtant, nous sommes obligés d'appliquer les formules pratiques existantes (qui se rapportent à ce schéma).

— Le gisement n'a pas été systématiquement échantillonné « du toit au mur ».

Les deux premières constatations engendrent une objection fondamentale à tout calcul de la teneur moyenne selon un schéma invariable. En effet, on peut se demander si, compte tenu de la variation de la dispersion d'une zone à l'autre, il est légitime de kriger uniformément dans tout le gisement et, d'une façon plus générale, si les moyennes ne devraient pas être calculées séparément. Remarquons que la variation de α dans la direction NS peut être attribuée à un phénomène géologique précis, la nature de plus en plus alluvionnaire du minerai.

La variation de α est due à des distributions spatiales différentes (nous avons montré que les distributions statistiques sont identiques). Les moyennes statistiques, pondérées ou non, ne sont donc pas modifiées par un découpage éventuel (qui, de toute façon, n'influence pas les moyennes générales dans tout le gisement).

Pour l'analyse des tendances, il faut définir avec précision les limites des zones à envisager, et cette définition serait nécessaire-

ment arbitraire. En outre, ces limites apparaîtront comme des lignes de discontinuités artificielles entre les surfaces:

$$T^x = \sum_{ij} L_{ij} x_i y_j \quad (\text{formule 21}).$$

Plus donc il y aura des zones, plus les moyennes seraient peut être plus précises et plus l'image du gisement sera déformée par le réseau de discontinuités artificielles.

La détermination par Krigeage de la teneur (ou accumulation) moyenne dans une zone d'influence ne fait intervenir que la position des puits entourant cette zone. Si donc on n'introduit pas une discontinuité artificielle à la limite entre zones, le résultat n'est pas modifié. Par contre la variance locale de Krigeage, qui est proportionnelle à 3α , sera significativement différente. Pour le calcul de la variance de l'estimation, nous avons remplacé, dans la moyenne pondérée, les valeurs locales de 3α par sa valeur moyenne (24). On peut donc dire a priori que la fourchette conventionnelle que nous indiquerons par la suite n'est pas absolument exacte (encore que la différence ne doit pas être très grande). Si des comparaisons locales estimation-production étaient possibles (par exemple dans chacune des carrières séparément) la détermination d'une fourchette conventionnelle locale plus précise serait peut être nécessaire. Or, si nous disposons des estimations pour chacune des carrières, nous n'avons pas pu reconstituer leurs productions respectives. Nous n'avons donc envisagé que la production totale et il est, croyons-nous inutile de rechercher une amélioration de la variance de l'estimation au prix d'un allongement démesuré des calculs et de conventions injustifiables.

A ces difficultés théoriques s'ajoutent des difficultés pratiques:

a) La prospection n'a pas été faite à maille constante et les zones d'influence ne sont pas toujours des carrés (Cf. fig. 2).

Nous avons donc dû définir de nouvelles zones d'influence carrées. De ce fait il y aura nécessairement des zones d'influence sans puits central (configuration lacunaire).

b) Ce découpage ne peut plus être appliqué à la limite entre deux régions prospectées à des mailles différentes. Il faut dans ce

(24) Il serait difficile de faire autrement. Chaque zone d'influence appartient à plusieurs régions représentées sur la figure 3. Le choix entre les différentes valeurs possibles de 3α est nécessairement arbitraire.

cas admettre souvent des zones d'influence rectangulaires et utiliser néanmoins les formules applicables aux carrés.

Notons que MATHERON a été confronté avec ce même problème à propos du gisement de bauxite de MAHENGUI [44]. Il n'indique malheureusement pas la solution adoptée.

c) Dans certaines régions les puits sont disposés en quinconce. On peut soit adopter de grandes zones d'influence avec puits central, soit de petites zones alternativement centrées et vides. Le principe de la superposition des Krigeages indique bien que ces deux découpages sont équivalents, mais dans certains cas on est très loin des Krigeages complets. Nous avons adopté (un peu arbitrairement) la deuxième solution.

d) Une cause supplémentaire d'erreurs est introduite par les coefficients β_{ij} . Non seulement on doit kriger dans toute une zone l'influence traversée par la limite d'exploitation, et partager ensuite le résultat dans le rapport β_{ij} (ce qui est incorrect), mais ces coefficients n'étant qu'approximativement déterminés, les surface et volume des carrières vont changer. Il faudra donc faire attention en comparant les chiffres du Krigeage à ceux fournis par les autres estimations.

Remarquons aussi qu'à cause du nouveau découpage en zones d'influence, les volume et surface du gisement tout entier seront également différents.

e) Lorsqu'on compare les configurations finalement obtenues à Bukena à celles étudiées par MATHERON [45], on constate que de nombreux cas n'ont pas été prévus par cet auteur. Nous avons donc dû établir de nombreuses formules d'application et c'est la seule entorse que nous avons tolérée au principe défini au paragraphe 2. Sans ces calculs l'application du Krigeage était impossible.

f) Finalement, compte tenu des dimensions variables des zones d'influence, des deux régions (exploitée et en place), des coefficients β_{ij} , des différentes catégories envisagées de minerai et des 4 variables, on doit tenir compte de plusieurs dizaines de formules, de plusieurs centaines de constantes et plusieurs dizaines de milliers de données. Même pour un ordinateur c'est trop (26).

(26) Notons une conséquence agréable. Les programmes de Krigeage établis peuvent servir à d'autres travaux du Laboratoire de Géologie Appliquée de l'U.L.B.

Nous voyons donc que déjà dans le cas relativement simple de Bukena, le Krigeage se situe à la limite des possibilités de calcul.

Comme pour les autres techniques d'estimation, nous avons krigé les quatre variables considérées.

Le tableau XX indique les estimations à partir des accumulations pondérées par les surfaces des zones d'influence.

Tableau XX

Estimation Moyennes des accumulations \bar{A}_{ij}^* obtenues par Krigeage, pondérées par les surfaces S_{ij}				
catégorie	moyenne \bar{A}^* g/m ²	variance σ_K^2 (\bar{A}^*)	surface m ²	poids SnO ₂ (t) Four- chette conventionn.
total $\bar{A}_{ij}^* \geq 1\ 500$	1 687	341,82	751 410	1 267 ± 14
	1 787	21 429	254 410	459 ± 74
total $\bar{A}_{ij}^* \geq 1\ 500$	664	724	4 816 990	3 198 ± 122
	1 709	22 841	238 110	407 ± 71
total $\bar{A}_{ij}^* \geq 1\ 500$	815	468,3	5 568 400	4 466 ± 120
	1 760	14 727	492 520	866 ± 119

On constatera que, indépendamment de la question de surfaces, le Krigeage des accumulations donne la meilleure estimation obtenue jusqu'à présent pour la zone exploitée. Elle est même meilleure que l'estimation du tableau V calculée à partir de teneurs (qui, nous le savons maintenant, donnent des chiffres plus élevés que les accumulations). Pour le gisement entier l'estimation est étonnamment proche de celle indiquée au tableau XVII (ajustement polynomial).

Pour les zones riches, aucune comparaison n'est malheureusement possible. En effet, pour les estimations précédentes, nous avons envisagé les zones d'influence des puits à teneur élevée et, dans le cas présent, nous avons considéré les zones d'influence à *accumulation moyenne* élevée.

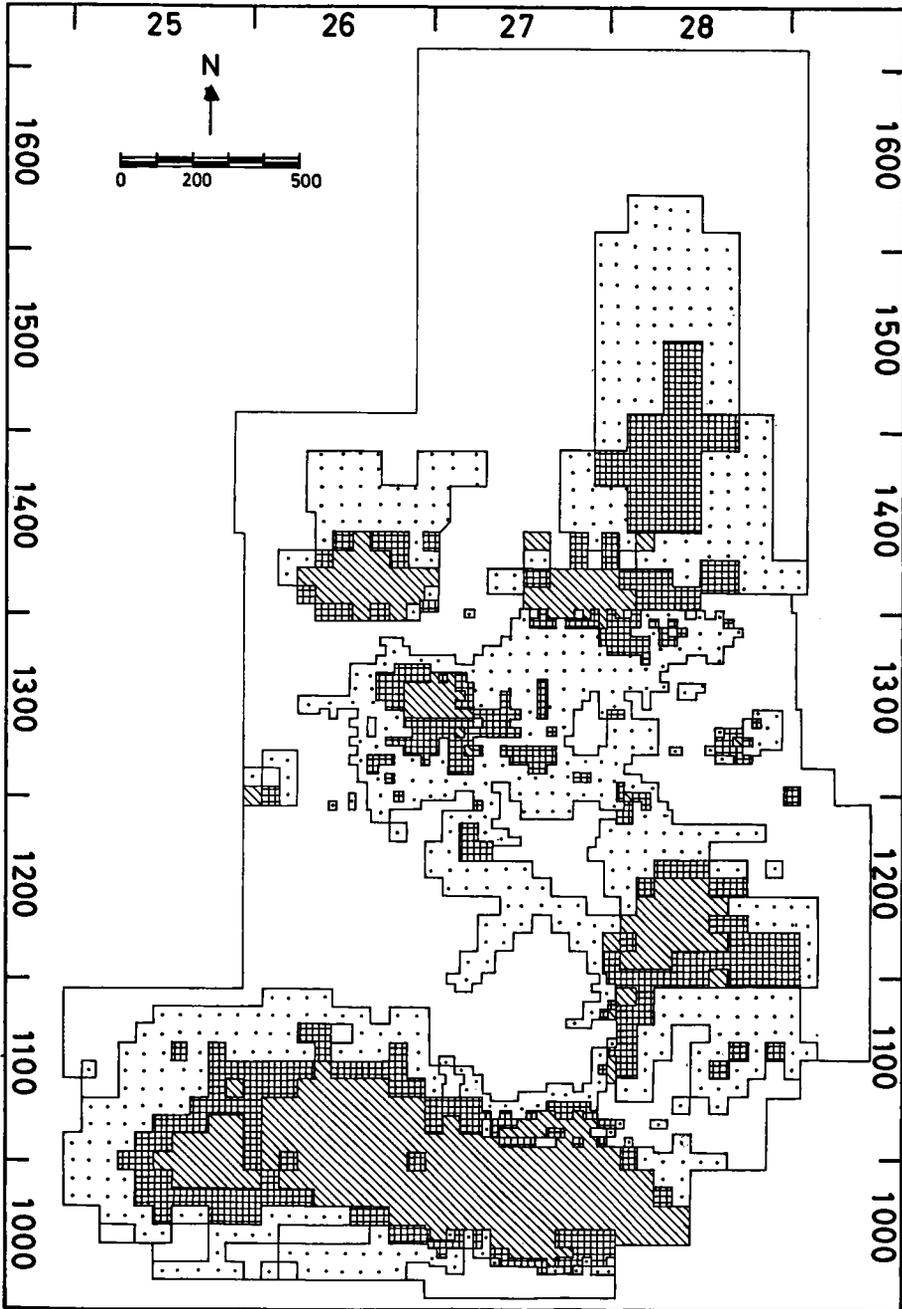


Figure 13 - Krigeage des accumulations A:

- Zones d'influence à $\bar{A}_{ij}^* < 750 \text{ g/m}^2$
- Zones d'influence à $750 \text{ g/m}^2 \leq \bar{A}_{ij}^* < 1125 \text{ g/m}^2$
- ▣ Zones d'influence à $1125 \text{ g/m}^2 \leq \bar{A}_{ij}^* < 1500 \text{ g/m}^2$
- ▤ Zones d'influence à $\bar{A}_{ij}^* \geq 1500 \text{ g/m}^2$

Pour mieux montrer la différence nous avons représenté à la figure 13 les résultats du Krigeage groupés en quatre tranches d'accumulations. En comparant cette figure aux figures 1 et 2, on voit toute la différence qu'il y a entre l'image fournie par les prélèvements quasi-ponctuels des puits et celle résultant de la pondération rationnelle des résultats.

Tableau XXI

Estimation					
Moyennes des logarithmes des accumulations $\overline{B_{ij}^*} = \overline{\log A_{ij}^*}$ obtenus par Krigeage, pondérés par les surfaces S_{ij}					
catégorie	moyenne $\overline{B^*}$	variance $\sigma_K^2(\overline{B_{ij}^*})$	$\overline{A^*} = e^{\overline{B^*}}$ g/m ²	surface m ²	poisn SnO ₂ (t) fourchette conventionnelle
total $e^{\overline{B_{ij}^*}} \geq 1\ 500$	7,3601	<i>Gisement exploité</i> 2,936	1 572	751 410	1 181 ± 1
	7,4608	191,86	1 739	244 140	424,6 ± 0,3
total $e^{\overline{B_{ij}^*}} \geq 1\ 500$	6,2990	<i>Gisement en place</i> 6,22	544	4 816 990	2 620 ± 5
	7,3601	245,39	1 573	197 900	311,3 ± 0,3
total $e^{\overline{B_{ij}^*}} \geq 1\ 500$	6,4422	<i>Gisement entier</i> 4,02	628	5 568 400	3 497 ± 6
	7,4417	113,03	1 705	442 040	753,7 ± 0,4

Le tableau XXI résume les résultats de l'estimation à partir des logarithmes des accumulations.

Une fois de plus, les résultats pour le gisement entier sont très proches de ceux obtenus par l'analyse des tendances. L'image du gisement (figure 14) est assez voisine de celle découlant du Krigeage des accumulations elles-mêmes, mais les zones riches sont plus réduites.

Le tableau XXII indique les résultats du Krigeage à partir des teneurs.

Dans les carrières, la concordance entre l'estimation et la production, compte tenu de nos approximations, est stupéfiante; la différence représente moins de 2 % ou de 3 % de la production (selon le chiffre adopté pour celle-ci). Il est juste d'ajouter que

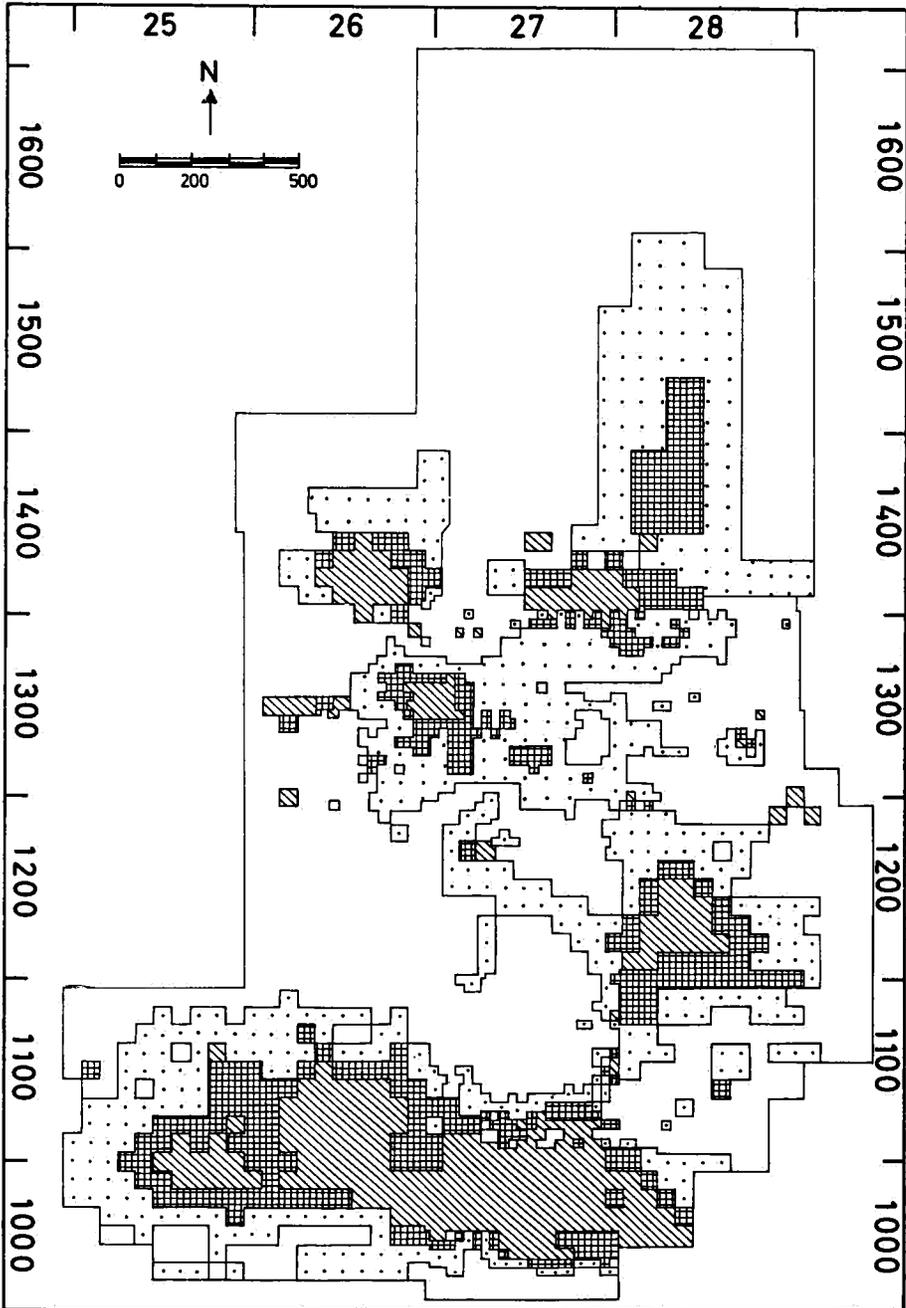


Figure 14 - Krigage des logarithmes des accumulations $B = \log A$:

- Zones d'influence à $\bar{B}_{ij}^* < \log 750$
- Zones d'influence à $\log 750 \leq \bar{B}_{ij}^* < \log 1125$
- ⊠ Zones d'influence à $\log 1125 \leq \bar{B}_{ij}^* < \log 1500$
- ▨ Zones d'influence à $\bar{B}_{ij}^* \geq \log 1500$

Tableau XXII

Estimation					
Moyennes des teneurs \bar{T}_{ij}^* obtenus par Krigeage, pondérés par les volumes V_{ij}					
catégorie	moyenne \bar{T}^* g/m ³	variance $\sigma_k^2(\bar{T})$	volume m ³	surface m ²	poids SnO ₂ (t) fourchette conventionnelle
		<i>Gisement exploité</i>			
total	806	108,03	1 699 900	751 410	1 370 ± 18
$\bar{T}_{ij}^* \geq 1\ 000$ g/m ³	1 190	4 960	159 625	92 710	190 ± 23
		<i>Gisement en place</i>			
total	411	206,54	7 718 600	4 816 990	3 172 ± 111
$\bar{T}_{ij}^* \geq 1\ 000$ g/m ³	1 139	4 057	248 675	150 340	283,3 ± 32
		<i>Gisement entier</i>			
total	482	141,25	9 418 300	5 568 400	4 540 ± 112
$\bar{T}_{ij}^* \geq 1\ 000$ g/m ³	1 159	2 264	408 300	243 050	473 ± 78

le poids de cassitérite produite est en dehors de la fourchette conventionnelle et que l'estimation pour le gisement entier, obtenue par ajustement polynomial est très voisine de celle résultant du Krigeage.

La fait que le poids de cassitérite effectivement produite est situé, quel que soit le principe d'estimation adopté, en dehors de la fourchette conventionnelle peut être attribué (du moins en partie) à une sous-estimation du volume excavé. Outre le fait que la profondeur réelle de l'exploitation peut localement être différente de celle indiquée sur les documents de prospection et de chantier, une estimation plus précise, par Krigeage des volumes p.ex., est impossible dans l'état actuel des connaissances, sans parler des complications de la corégionalisation signalées aux paragraphes 6.1.2. et 6.1.3. Une meilleure connaissance de la surface des carrières peut améliorer l'estimation de la valeur centrale (1 370 t dans le cas envisagé), mais la différence ne serait pas importante. Par contre, si l'estimation de l'erreur de prospection était possible, la fourchette conventionnelle serait beaucoup plus large et l'incertitude sur les chiffres avancés augmenterait notablement.

L'image de Bukena fournie par le Krigeage des teneurs (fig. 15) est bien différente de celle résultant de l'extension aux zones

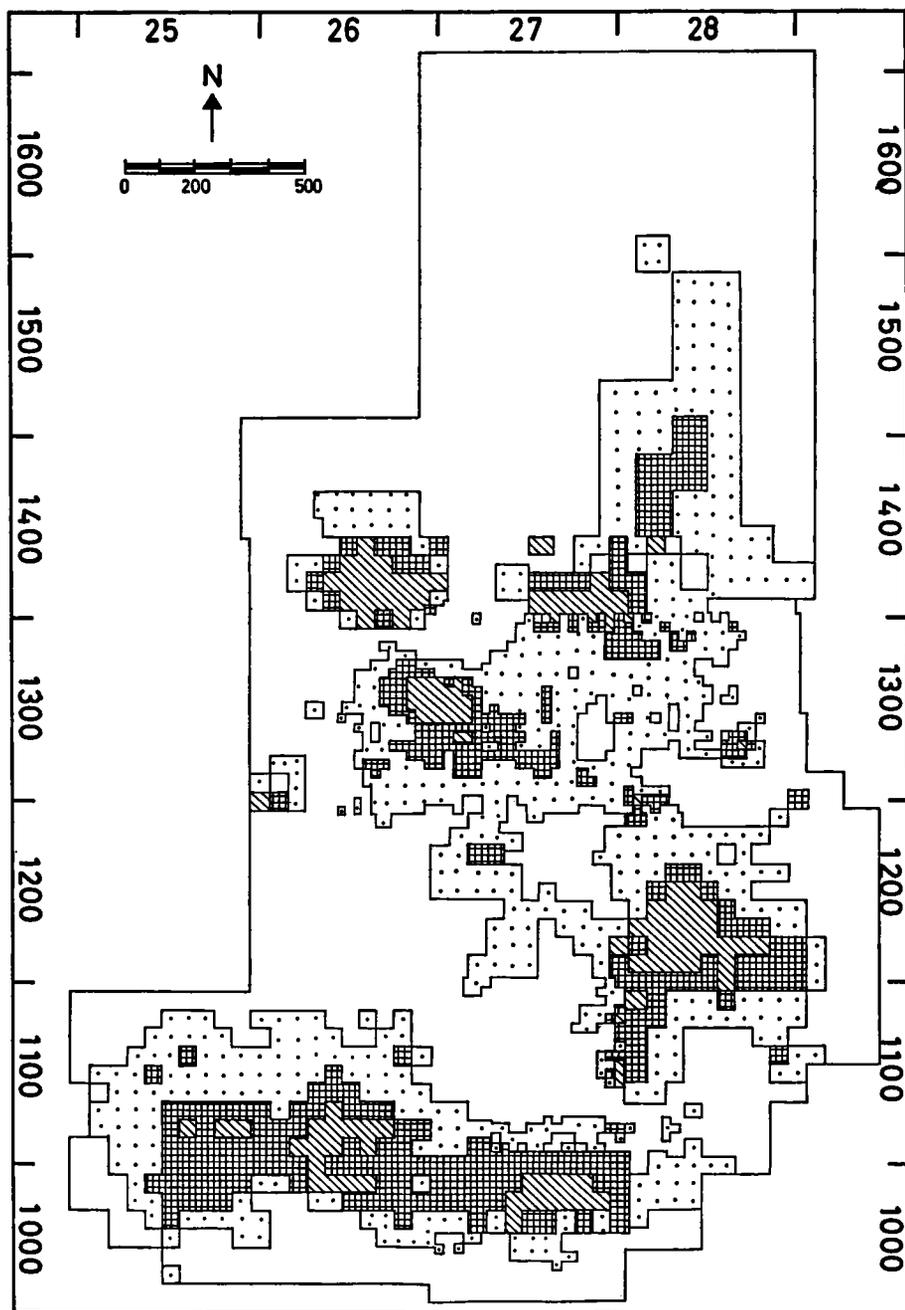


Figure 15 - Krigeage des teneurs T:

- Zones d'influence à $\bar{T}_{1j}^* < 500 \text{ g/m}^3$
- Zones d'influence à $500 \text{ g/m}^3 \leq \bar{T}_{1j}^* < 750 \text{ g/m}^3$
- ▣ Zones d'influence à $750 \text{ g/m}^3 \leq \bar{T}_{1j}^* < 1000 \text{ g/m}^3$
- ▤ Zones d'influence à $\bar{T}_{1j}^* \geq 1000 \text{ g/m}^3$

d'influence de la teneur du puits central (fig. 2). A la place de zones riches distribuées un peu au hasard dans les 3 régions intéressantes de Bukena, nous avons des zones plus réduites et beaucoup plus régulièrement distribuées.

L'estimation par Krigeage des logarithmes des teneurs est indiquée au tableau XXIII.

Estimation

Tableau XXIII
Moyennes des logarithmes des teneurs $\overline{W}_{ij}^* = \log T_{ij}^*$ obtenus par Krigeage, pondérés par les volumes V_{ji}

catégorie	moyenne \overline{W}^*	variance $\sigma_K^2(\overline{W}^*)$.10 ⁴	$\overline{T}^* = e^{\overline{W}^*}$ g/m ³	volume m ³	surface m ²	poids SnO ₂ (t) fourchette conventionnelle
			<i>Gisement exploité</i>			
total	6,6383	3,353	764	1 699 900	751 410	1 299 ± 2
$e^{\overline{W}_{ij}^*} \geq 1 000$	7,0957	112,50	1 207	143 860	81 820	172,4 ± 0,2
			<i>Gisement en place</i>			
total	5,812	6,323	334	7 718 600	4 816 990	2 578 ± 8
$e^{\overline{W}_{ij}^*} \geq 1 000$	7,0116	122,9	1 109	254 650	154 700	282,2 ± 0,2
			<i>Gisement entier</i>			
total	5,961	4,32	389	9 418 300	5 568 400	3 664 ± 10
$e^{\overline{W}_{ij}^*} \geq 1 000$	7,0412	66,98	1 143	397 510	236 520	454,2 ± 0,4

Ces résultats sont à la fois moins bons que ceux obtenus par Krigeage des teneurs elles-mêmes et meilleurs que les autres estimations à partir des logarithmes des teneurs. Seul le chiffre correspondant au gisement entier est, comme pour les autres Krigeages, très voisin de celui de l'estimation par analyse des tendances.

L'image de gisement (fig. 16) est très semblable à celle donnée par les teneurs, mais les zones riches sont plus réduites.

Enfin, à la figure 17, nous avons indiqué les courbes de distributions des valeurs moyennes de Krigeage dans les zones d'influence pour les 4 variables étudiées.

On constate que les distributions ne sont plus du tout assimilables à des courbes log-normales, ce qui montre bien le danger qu'il y a à utiliser des distributions pour l'estimation.

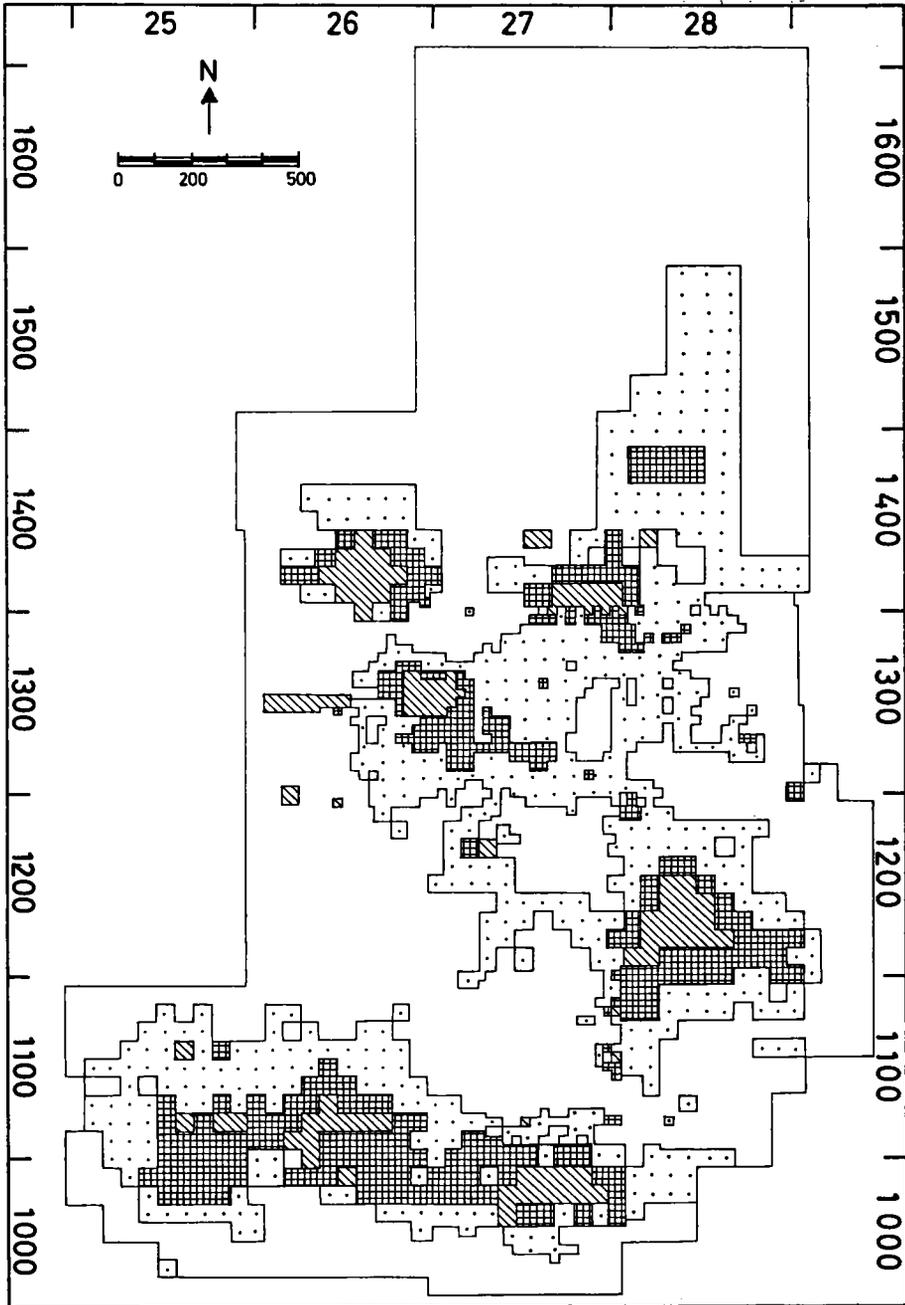


Figure 16 - Krigage des logarithmes des teneurs $W = \log T$:

- Zones d'influence à $\bar{W}_{ij}^* < \log 500$
- Zones d'influence à $\log 500 \leq \bar{W}_{ij}^* < \log 750$
- ▣ Zones d'influence à $\log 750 \leq \bar{W}_{ij}^* < \log 1000$
- ▨ Zones d'influence à $\bar{W}_{ij}^* \geq \log 1000$

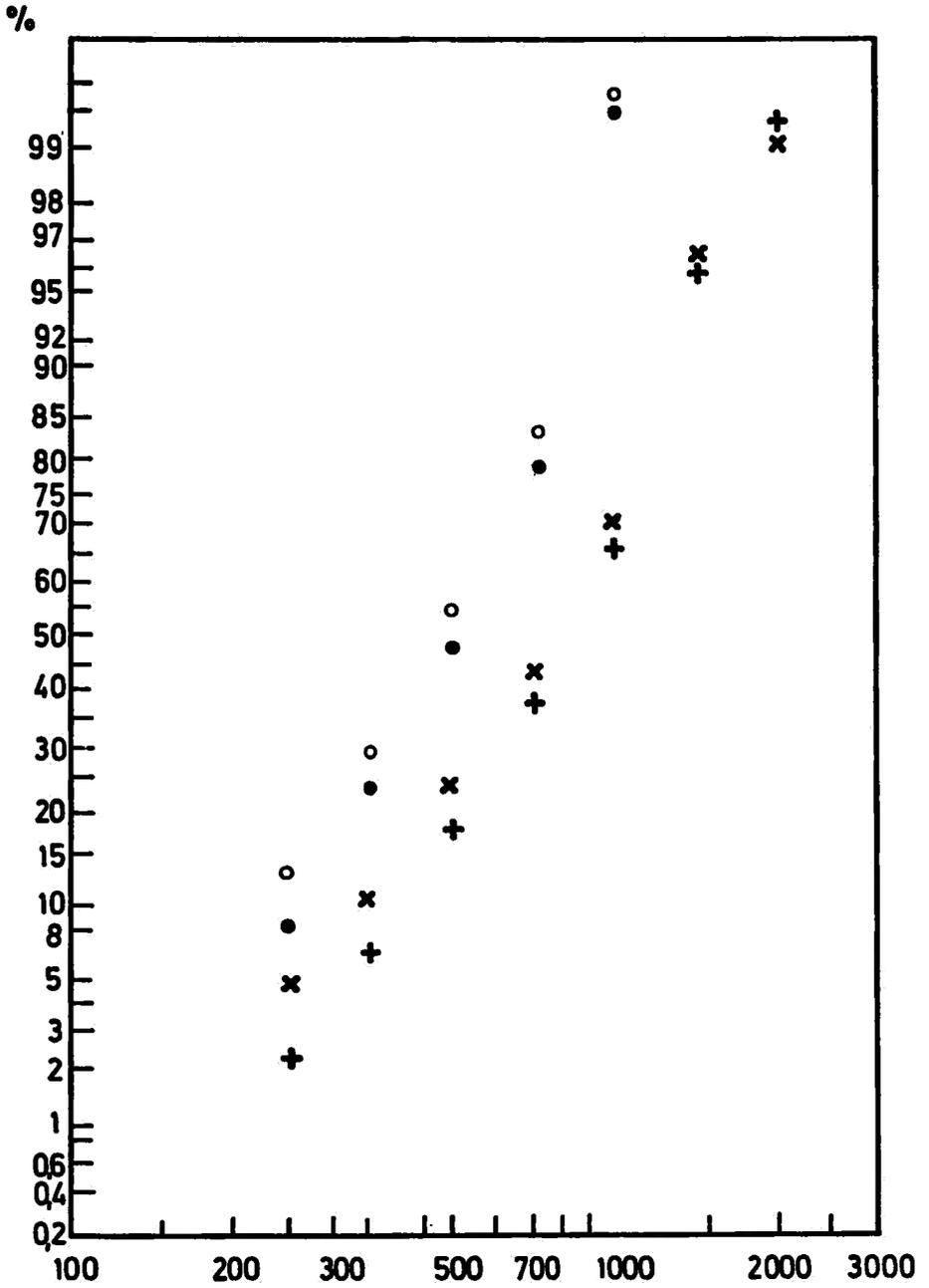


Figure 17 - Distributions après krigage:

- + Accumulations \bar{A}_{1j} * en g/m^2
- × Logarithmes des accumulations \bar{B}_{1j} *
- Teneurs \bar{T}_{1j} * en g/m^3
- Logarithmes des teneurs \bar{W}_{1j} *

VII. CONCLUSIONS

Nous avons comparé les évaluations obtenues par des techniques diverses. C'est le Krigeage des teneurs qui donne la meilleure estimation. Cette conclusion n'est valable que pour Bukena.

S'il faut tirer une conclusion plus générale, nous dirons que selon la technique adoptée, on peut obtenir des résultats très différents et que des comparaisons nombreuses seront encore nécessaires avant de pouvoir « estimer » l'efficacité des différentes méthodes.

REMERCIEMENTS

Nous remercions de tout cœur Monsieur J. VAN ROEY, assistant au service de mathématiques de la Faculté des Sciences Appliquées de l'U.L.B., qui a bien voulu assumer la tâche, bien ingrate, de calculateur.

Nous remercions également très sincèrement le Professeur O. BEAUFAYS et le Centre de Calcul de l'U.L.B. qui nous ont fourni généreusement l'appui logistique indispensable à la réalisation de ce travail.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] AGTERBERG, F.P.: Application of trend analysis in the evaluation of the Whalesback Mine, Newfoundland - Can. I.M.M. Special, vol. 9, Ore reserve estimation and grade control (1968) pp. 77-88.
- [2] ANDERSON, R.L.: Distribution of the serial correlation coefficient - Annals of mathem. statistics, vol. 13 (1942) pp. 1-13.
- [3] BATY, V.: Les méthodes d'évaluation des gîtes minéraux - R.U.M. 9^e série; tome V (2, 1949) pp. 51-59.
- [4] BECKER, R.M.: Some generalised probability distributions with special reference to the mineral industries; Part 1: Sampling to n items - U.S.B.M. R.I. 6329 (1964).
- [5] BECKER, R.M. and HAZEN, S.W.: Particle statistics of infinite populations as applied to mine sampling - U.S.B.M. R.I. 5669 (1961).
- [6] BENNET, C.A. and FRANKLIN, N.L.: Statistical analysis in chemistry and the chemical industry - J. Wiley and sons (1954).
- [7] BERKENKOTTER, R.D.: Application of statistical analysis in evaluating bedden deposits of variable thickness; Florida phosphate data - U.S.B.M. R.I. 6526 (1964).
- [8] BERKENKOTTER, R.D. and HAZEN, S.W.: Statistical analysis of diamond-drill sample data from the Cabolla Creek titaniferous iron deposit, Gunnison county, Colo. - U.S.B.M. R.I. 6234 (1963).
- [9] BLAIS, R.A. and CARLIER, P.A.: Applications of geostatistics in ore evaluation - Can. I.M.M. Special, vol. 9, Ore reserve estimation and grade control (1968) pp. 41-70.
- [10] CAHEN, L., DELHAL, J. and DEUTSCH, S.: Rubidium-strontium geochronology of some granitic rocks from Kibaran belt - Ann. Musée royal Afr. Cent., n° 59 (1967).
- [11] COX, D.R. and LEWIS, P.A.W.: The statistical analysis of series of events - J. Wiley and sons (1966).
- [12] CRAMER, H.: Mathematical methods of statistics - Princeton Univ. Press (1966).
- [13] DAVID, M.: Grade-tonnage curve: use and misuse in ore-reserve estimation - Trans. I.M.M., vol. 81, sect. A, Bull. 788 (7, 1972) pp. A. 129-132.
- [14] DAVID, M. and BLAIS, R.A.: Discussion de [57] - Can. I.M.M. Special, vol. 9, Ore reserve estimation and grade control (1968) pp. 114-115.

- [15] DE WIJS, H.J.: Statistics of ore distribution; Part. I: frequency distribution of assay value - Geol. en Mijnbouw, vol. 13 (11, 1951) pp. 365-375; Part II: theory of binomial distribution applied to sampling and engineering problems - Geol. en Mijnbouw, vol. 15 (1, 1953) pp. 12-24.
- [16] DE WIJS, H.J.: Method of successive differences applied to mine sampling - Trans. I.M.M., vol. 82, sect. A, Bull. 785 (4, 1972) pp. A. 78-81 and Bull. 794 (1, 1973) pp. A. 27-28.
- [17] DIETRICH, R., GUNTHER, J.-B. et LEGOUX, P.: Stabilité des cours au comptant et au terme des métaux non-ferreux - Ann. des Mines (Fr.), nov. 1972, pp. 23-36.
- [18] EVRARD, P. and SCHAAR, G.: Application of statistical methods to the evaluation of mining deposits - 2nd techn. Conf. on tin (Bangkok 1969 - vol. 2, pp. 521-535).
- [19] GRANT, F.: A problem in the analysis of geophysical data - Geophysics, vol. 22 (2, 1957) pp. 309-344.
- [20] GROSJEAN, P.V.: L'évaluation mathématique des gisements détritiques - Mémoires Inst. roy. colon. belge, tome VIII, fasc. 3 (1953).
- [21] GY, P.: L'échantillonnage des minerais en vrac - Mémoires B.R.G.M., n° 56 (1967).
- [22] HAAS, A., MATHERON, G. et SERRA, J.: Morphologie mathématique et granulométries en place - Ann. des Mines (Fr.), nov. 1967, pp. 735-753; déc. 1967, pp. 767-782.
- [23] HAZEN, S.W.: A comparative study of statistical analysis and other methods of computing ore reserves, utilizing analytical data from Maggie Canyon manganese deposit, Artillery Mountain Region, Mohava county, Ariz. - U.S.B.M. R.I. 5375 (1958).
- [24] HAZEN, S.W.: Statistical analysis of sample data for estimating ore - U.S.B.M. R.I. 5833 (1961).
- [25] HAZEN, S.W.: Statistical analysis of churn-drill and diamond-drill sample data from San Manuel copper mine, Ariz. - U.S.B.M. R.I. 6216 (1963).
- [26] HAZEN, S.W.: Assigning an area of influence for an assay obtained in mine sampling - U.S.B.M. R.I. 6955 (6, 1967).
- [27] HAZEN, S.W.: Ore reserve calculations - Can. I.M.M. Special, vol. 9, ore reserve estimation and grade control (1968) pp. 11-32.
- [28] HAZEN, S.W. and BERKENKOTTER, R.D.: An experimental mine-sampling project designed for statistical analysis - U.S.B.M. R.I. 6019 (1962).
- [29] HAZEN, S.W. and GLADFELTER, G.W.: Using unequal sample intervals and weighted averages in estimating grade of ore from bedded deposits - U.S.B.M. 6406 (1964).
- [30] HESTER, B.W.: Discussion de [81] - Trans. I.M.M., vol. 82, sect. A, Bull. 794 (1, 1973) pp. A. 28-29.

- [31] HEWLETT, R.F.: Polynomial surface fitting using sample data from an underground copper deposit - U.S.B.M. R.I. 6522 (1964).
- [32] KENDALL, M.G. and STUART, A.: The advanced theory of statistics (2nd ed.) - Ch. Griffin (1968).
- [33] KOCH, G.S.: Computer applications in mining geology - Computer applications in the earth sciences (an international symposium) Plenum Press (1969) pp. 121-140.
- [34] KOCH, G.S. and LINK, R.F.: Statistical analysis of geological data - J. Wiley and sons, vol. 1 (1970); vol. 2 (1972).
- [35] KRIGE, D.G.: A statistical approach to some basic mine valuation problems on the Witwatersrand - Journ. Chem. Metall. Min. Soc. South Africa, vol. 52 (6, 1951) pp. 119-139.
- [36] KRIGE, D.G. and MUNRO, A.H.: A review of some conceptual and practical implications of the use of valuation surfaces for gold ore reserve estimation - Can. I.M.M. Special, vol. 9, Ore reserve estimation and grade control (1968) pp. 33-40.
- [37] KRUMBEIN, W.C.: Trend surface analysis of contour-type maps with irregular control-point spacing - Journ. of Geophys. Research, vol. 40 (1959) pp. 823-824.
- [38] KUSCEVIC, B., THOMAS, T.L. and PENBERTHY: Sampling distribution in South Crofty tin mine, Cornwall - Trans. I.M.M., vol. 81, sect. A, Bull. 788 (7, 1972) pp. A. 180-187.
- [39] LASKY, S.G.: How tonnage and grade relations help predict ore reserves - Eng. Min. Journ., vol. 151 (4, 1950) pp. 81-85.
- [40] LASKY, S.G.: La relation entre le tonnage et la teneur des minerais et la prévision des réserves - Chr. mines colon., vol. 19, n° 177 (3, 1951) pp. 58-65. Traduction française par Blondel de l'article anglais publié dans Color. School of mines quarter, vol. 45, n° 1A (1, 1950).
- [41] LINK, R.F., KOCH, G.S. and GLADFELTER, G.I.: Computer methods of fitting surfaces to assay and other data by regression analysis - U.S.B.M. R.I. 6508 (1964).
- [42] LINK, R.F., KOCH, G.S. and SCHUENEMEYER, J.H.: Statistical analysis of gold assay and other trace-element data - U.S.B.M. R.I. 7495 (4, 1971).
- [43] LINK, R.F., YABE, N.N. and KOCH, G.S.: A computer method of fitting surfaces to assay and other data in three dimensions by quadratic-regression analysis - U.S.B.M. R.I. 6876 (1966).
- [44] MATHERON, G.: *Traité de géostatistique appliquée; tome I - Mémoires du B.R.G.M., n° 14 (1962).*
- [45] MATHERON, G.: *Traité de géostatistique appliquée; tome II: le Krigage - Mémoires du B.R.G.M., n° 24 (1963).*
- [46] MATHERON, G.: Principles of geostatistics - Econ. geol., vol. 58 (8, 1963) pp. 1246-1966.
- [47] MATHERON, G.: *Etude théorique des granulométries - B.R.G.M., note de géostatistique, n° 57 (12, 1964).*

- [48] MATHERON, G.: Les variables régionalisées et leur estimation - Masson et Cie (1965).
- [49] MATHERON, G.: Le Krigeage universel - Cahiers cent. morph. mathém., fasc. 1 (1969).
- [50] MATHERON, G. et FORMERY, Ph.: Recherche d'optimum dans la reconnaissance de la mise en exploitation des gisements miniers - Ann. des Mines (Fr.), mai 1963, pp. 219-238.
- [51] MERRIAM, D.R., [Ed.]: Computer applications in earth sciences (an international symposium) - Plenum Press (1969).
- [52] MOUSSU, R.: Estimation des réserves des gisements de Bukena, Kania et Mitwaba - B.R.G.M., 69 SGL, 111 GIT (1969).
- [53] MURARD, R.: Probabilités et statistique - Rev. Indust. Minér. Doc., SIMA (1960).
- [54] MUSGROVE, Ph.: Lead: grade-tonnage relation - Mining mag., vol. 112 (4, 1965) pp. 249-250.
- [55] NICHOL, I., GARRET, R.C. and WEBB, J.S.: The role of some statistical and mathematical methods in the interpretation of regional geochemical data - Econ. geol., vol. 64 (2, 1969) pp. 204-220.
- [56] NOLAN, T.B.: The search for new mining districts - Econ. geol., vol. 45 (7, 1950) pp. 601-608.
- [57] O'BRIAN, D.T. and WEISS, A.: Practical aspect of computer methods in ore reserve analysis - Can. I.M.M. Special, vol. 9, Ore reserve estimation and grade control (1968) pp. 109-113.
- [58] PANOU, G.: Thèse de doctorat - U.L.B. (1, 1964).
- [59] PANOU, G.: Etude de la répartition spatiale des filons au contact sud du massif de Los Pedroches - Bull. soc. belge géol., tome LXXX (1-2, 1971) pp. 61-76.
- [60] PATTERSON, J.A.: Estimation of ore reserves follows logical steps - Eng. and min. journ., vol. 196 (9, 1959) pp. 111-115.
- [61] PILOSKI, M.J.: Discussion de [1] - Can. I.M.M. Special, vol. 9, Ore reserve estimation and grade control (1968) pp. 89-94.
- [62] POPOFF, C.C.: Computing reserves of mineral deposits: principles and conventional methods - U.S.B.M., I.C. 8283 (1963).
- [63] RAEBURN, C. and MILNER, H.B.: Alluvial prospecting - T. Murby and Co (1927).
- [64] ROLLET, A.: La centrale géothermique de Kiabukwa (Katanga) - C.R. cong. scient. C.S.K. Elisabeth. (1950) vol. 3, pp. 195-203.
- [65] ROLLET, A.: L'histoire de Bukena - Arch. Sermikat 1956 (non publié).
- [66] ROYLE, A.G.: Discussion de [81] - Trans. I.M.M., vol. 82, sect. A, Bull. 794 (1, 1973) pp. A. 28-32.
- [67] ROYLE, A.G. and NEWTON, M.J.: Mathematical models, sample sets and ore reserve estimation - Trans. I.M.M., vol. 81, sect. A, Bull. 788 (7, 1972) pp. A. 121-128 et Bull. 794 (1, 1973) pp. A. 25-27.

- [68] ROYLE, A.G., NEWTON, M.J. and SARIN, V.K.: Geostatistical factors in design of mine sampling programs - Trans. I.M.M., vol. 81, sect. A, Bull. 785 (4, 1972) pp. A. 82-88.
- [69] SERMIKAT, S.A.: Archives (non publié).
- [70] SERRA, J.: Remarques sur une lame mince de minerai lorrain - Bull. B.R.G.M. (6, 1966) pp. 1-36.
- [71] SERRA, J.: Les structures gigognes morphologie mathématique et interprétation métallogénique - Mineral. depos., vol. 3 (1968) pp. 135-154.
- [72] SICHEL, H.S.: An experimental and theoretical investigation of bias error in mine sampling with special reference to narrow gold reefs - Trans. I.M.M., vol. 56 (1946-47) pp. 403-474.
- [73] SICHEL, H.S.: New methods in statistical evaluation of mine sampling data - Trans. I.M.M., vol. 61 (3, 1952) pp. 261-288.
- [74] SLICHTER, L.B.: The need of a new philosophy of prospecting - Min. Eng., vol. 12 (6, 1960) pp. 570-576.
- [75] SMITH, J.W., TRUDEL, L.G. and STANFIELD, K.E.: Comparison of oil yields from core and drill-cutting sampling of green River oil shales - U.S.B.M., R.I. 6299 (1963).
- [76] TILLÉ, R.: Le paradoxe de l'évaluation des réserves de gisements miniers ou les réflexions du prospecteur désabusé - Soc. roy. belge des ing. et indust. (1971).
- [77] TIMPERLEY, M.H., BROOKS, R.R. and PATERSON, P.J.: Trend analysis as an aid to the comparison and interpretation of biochemical and geochemical data - Econ. geol., vol. 67 (5, 1972) pp. 669-676.
- [78] WHITTEN, E.H.T.: Compositional trends in granite: modal variation and ghost-stratigraphy in part of the Donegal granite, Eire - Journ. Geoph. Research, vol. 64 (1959) pp. 835-848.
- [79] WHITTEN, E.H.T.: Quantitative models in the economic evaluation of rock units illustrated with the Donegal granite and goldbearing Witwatersrand conglomerates - Trans. I.M.M., vol. 75, sect. B (1966) pp. B. 181-198.
- [80] WHITTEN, E.H.T.: Trends in computer applications in structural geology - Computer application in the earth sciences (An international symposium) Plenum Press (1969) pp. 223-249.
- [81] WILLIAMSON, D.R. and THOMAS, T.L.: Trend analysis of alluvial deposits by use of rolling mean techniques - Trans. I.M.M., vol. 81, sect. A, Bull. 785 (4, 1972) pp. A. 89-96 et Bull. 794 (1, 1973) pp. A. 28.
- [82] WRICHT, R.J.: An experimental comparison of U_3O_8 ore estimator versus production - Eng. Min. Journ., vol. 160 (11, 1959) pp. 100-102.



TABLE DES MATIERES

RÉSUMÉ	3
SAMENVATTING	3
I. Bukena	5
II. Les divers méthodes d'évaluation	9
III. Notations utilisées	13
IV. Application des méthodes statistiques	14
V. L'analyse des tendances	33
VI. Krigeage	44
VII. Conclusions	85
REMERCIEMENTS	86
BIBLIOGRAPHIE	87
TABLE DES MATIÈRES	93



Achévé d'imprimer le 10 janvier 1975
par l'Imprimerie SNOECK-DUCAJU et Fils, S.A., Gand-Bruxelles