

**Institut Royal Colonial Belge**

SECTION DES SCIENCES TECHNIQUES

Mémoires. — Collection in-4°  
Tome V. — Fascicule 1.

**Koninklijk Belgisch Koloniaal Instituut**

SECTIE VOOR TECHNISCHE WETENSCHAPPEN

Verhandelingen. — Verzameling in-4°  
Boek V. — Afllevering 1.

---

**LA GÉODÉSIE**

ET LA

**MÉTHODE GRAVIMÉTRIQUE**

PAR

**L. BRAGARD**

DOCTEUR EN SCIENCES MATHÉMATIQUES



**BRUXELLES**

Librairie Falk fils,  
GEORGES VAN CAMPENHOUT, Successeur,  
22, rue des Paroissiens, 22.

**BRUSSEL**

Boekhandel Falk zoon,  
GEORGES VAN CAMPENHOUT, Opvolger,  
22, Parochianenstraat, 22.

1949

En vente à la Librairie FALK Fils, G. VAN CAMPENHOUT, Succ<sup>r</sup>.  
Téléph. : 12.39.70 22, rue des Paroissiens, Bruxelles G. C. P. n° 142.90

Te koop in den Boekhandel FALK Zoon, G. VAN CAMPENHOUT, Opvolger.  
Telef. 12.39.70 22, Parochianenstraat, te Brussel. Postrekening : 142.90

LISTE DES MÉMOIRES PUBLIÉS AU 10 DÉCEMBRE 1949.

COLLECTION IN-8°

SECTION DES SCIENCES MORALES ET POLITIQUES

Tome I.

PAGES, le R. P., *Au Ruanda, sur les bords du lac Kivu (Congo Belge). Un royaume hamite au centre de l'Afrique* (703 pages, 29 planches, 1 carte, 1933) . . . fr. 250 »

Tome II.

LAMAN, K.-E., *Dictionnaire kikongo-français* (XCIV-1183 pages, 1 carte, 1936) . . . fr. 600 »

Tome III.

1. PLANQUAERT, le R. P. M., *Les Jaga et les Bayaka du Kwango* (184 pages, 18 planches, 1 carte, 1932) . . . fr. 90 »

2. LOUWERS, O., *Le problème financier et le problème économique au Congo Belge en 1932* (69 pages, 1933) . . . fr. 25 »

3. MOTTOULLE, le Dr L., *Contribution à l'étude du déterminisme fonctionnel de l'industrie dans l'éducation de l'indigène congolais* (48 p., 16 pl., 1934) . . . fr. 60 »

Tome IV.

MERIENS, le R. P. J., *Les Badzing de la Kamisha :*

1. Première partie : *Ethnographie* (381 pages, 3 cartes, 42 figures, 10 planches, 1935) . . . fr. 120 »

2. Deuxième partie : *Grammaire de l'Idzing de la Kamisha* (xxxii-388 pages, 1938) . . . fr. 230 »

3. Troisième partie : *Dictionnaire Idzing-Français suivi d'un aide-mémoire Français-Idzing* (240 pages, 1 carte, 1939) . . . fr. 140 »

Tome V.

1. VAN REETH, de E. P., *De Rol van den moederlijken oom in de inlandsche familie* (Verhandeling bekroond in den jaarlijkschen Wedstrijd voor 1935) (35 blz., 1935) . . . fr. 10 »

2. LOUWERS, O., *Le problème colonial du point de vue international* (130 pages, 1936) . . . fr. 50 »

3. BITTREMIEUX, le R. P. L., *La Société secrète des Bakimba au Mayombe* (327 pages, 1 carte, 8 planches, 1936) . . . fr. 110 »

Tome VI.

MOELLER, A., *Les grandes lignes des migrations des Bantous de la Province Orientale du Congo belge* (578 pages, 2 cartes, 6 planches, 1936) . . . fr. 200 »

Tome VII.

1. STRUYF, le R. P. I., *Les Bakongo dans leurs légendes* (280 pages, 1936) . . . fr. 110 »

2. LOTAR, le R. P. L., *La grande chronique de l'Ubangi* (99 p., 1 fig., 1937) . . . fr. 30 »

3. VAN CAENEGHEM, de E. P. R., *Studie over de gewoontelijke strafbepalingen tegen het overspel bij de Baluha en Ba Lulua van Kasai* (Verhandeling welke in den Jaarlijkschen Wedstrijd voor 1937. den tweeden prijs bekomen heeft) (56 blz., 1938) . . . fr. 20 »

4. HULSTAERT, le R. P. G., *Les sanctions coutumières contre l'adultère chez les Nkundó* (Mémoire couronné au Concours annuel de 1937) (53 pages, 1938) . . . fr. 20 »

Tome VIII.

HULSTAERT, le R. P. G., *Le mariage des Nkundó* (520 pages, 1 carte, 1938) . . . fr. 200 »



## ERRATA

au Mémoire L. BRAGARD, La Géodésie et la méthode gravimétrique (*Inst. Roy. Col. Belge, Sect. des Sc. techn.*, collection in-4<sup>o</sup>, T. V, Fasc. 1, Bruxelles, 1949).

	<u>Au lieu de</u>	<u>Lire</u>
p. 6, l. 18	$\frac{d(v + u)}{dn}$	$\frac{d(V + U)}{dn}$
l. 2	$\frac{\omega^2 a}{g_0}$	$\frac{\omega^2 a}{g_a}$
p. 8, l. 21, p. 9 l. 6 et p. 32 l. 10	surface	figure
p. 13, l. 9	$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$	$u_0 + u_1 + \dots + u_n + \dots$
p. 14, l. 9	$\sec \eta_1 \sec \eta_2$	$\sec \eta_1 \sec \eta_2 \cos \eta_2$
p. 15, l. 8	$\sec \eta_1 \sec \eta_2$	$\sec \eta_1$
l. 14	$h$	$g$
l. 14 et l. 1, p. 16 l. 10 et l. 14	$X'_n$	$X_n$
p. 17, l. 3	$+ (-1)^{l-1} A_1^{l-1} [(X_2)_{\theta=\frac{\pi}{2}}]^{l-1}$	$+ (-1)^{l-1} A_1^{l-1} [(X_2)_{\theta=\frac{\pi}{2}}]^{l-1}$
p. 18, l. 3	$\frac{1}{2} \omega^2 r^2 \sin^2 \theta = \frac{m G_m a_m}{3} \left[ 1 + \sum_{i=1}^{i=l} \Psi_i X_{2i} \right]$	$\frac{1}{2} \omega^2 r^2 \sin^2 \theta = \frac{m G_m a_m}{3} \left[ 1 + \sum_{i=1}^{i=l-1} \Psi_i X_{2i} \right]$

	<u>Au lieu de</u>	<u>Lire</u>
l. 14	$(n = 1 \dots l)$	$(i = 1 \dots l)$
l. 6	les $\Psi_i$	$m$
p. 25, l. 8	en $z = 0$	$z = 0$
p. 27, l. 10 et p. 32, l. 3	volume	rayon $a_m$
p. 29, l. 11	$P_n$	$X_n$
p. 40, l. 5	$\left(\frac{a}{r}\right)^2$	$\left(\frac{a}{r}\right)^3$
p. 41 note (2)	potentiels	potentiés
p. 44 note (2)	$G_m$	$G$
p. 46, l. 9	$X_n r'^n d\sigma dr'$	$X_n r'^n \cos \eta d\sigma dr'$
p. 47, l. 5 et l. 6	$+ \frac{1}{2}(n+2) \left[ \frac{\epsilon^2}{9} + \frac{2}{9} \epsilon^2 X'_2 + \frac{2}{9} \epsilon^2 \left( \quad \right) \right]$ $+ \frac{1}{n+3} \left\{ \frac{4}{15} \epsilon^2 + \frac{4}{21} \epsilon^2 X'_2 - \frac{16}{35} \epsilon^2 X'_4 \right\}$	$+ \frac{1}{2}(n+2) \left[ \frac{\epsilon^2}{9} + \frac{4}{9} \epsilon^2 X'_2 + \frac{4}{9} \epsilon^2 \left( \quad \right) \right]$
l. 7 et l. 15	$+ \frac{4}{15} \epsilon^2, + \frac{109}{5 \times 35} \epsilon^2 X_2 \text{ et } + \frac{4 \times 59}{21 \times 35} \epsilon^2 X_4$	$0, + \frac{3}{5} \epsilon^2 X_2 \text{ et } + \frac{12}{35} \epsilon^2 X_4$
l. 7, p. 50 l. 2 et p. 51 l. 4	$+ \frac{13}{75} \epsilon^2, + \frac{11}{35} \epsilon^2 \text{ et } - \frac{16 \times 47}{35 \times 105} \epsilon^2 X_4$	$- \frac{7}{15} \epsilon^2, + \frac{\epsilon^2}{7} \text{ et } - \frac{32}{35 \times 5} \epsilon^2 X_4$
p. 51, l. 1	$+ \frac{22}{15 \times 35} \epsilon^2$	$+ \frac{2}{15 \times 7} \epsilon^2$

l. 8	$+\frac{17}{3 \times 75} m \epsilon^2$	$+\frac{19}{3 \times 105} m \epsilon^2$
l. 10	$+\frac{4 \times 1219}{33 \times 35 \times 105} m \epsilon^2$	$+\frac{4 \times 79}{11 \times 35 \times 15} m \epsilon^2$
p. 52, l. 3	$+\frac{524}{21 \times 35} m \epsilon^2$ et $-\frac{64}{45 \times 21} \epsilon^2$	$+\frac{116}{21 \times 7} m \epsilon^2$ et $-\frac{64}{45 \times 21} \epsilon^3$
l. 4 et l. 12	$-\frac{2 \times 6991}{77 \times 105} m \epsilon^2$	$-\frac{2 \times 7519}{77 \times 105} m \epsilon^2$
l. 10	$-\frac{537}{7 \times 35} m \epsilon^2$	$-\frac{311}{7 \times 21} m \epsilon^2$
l. $\bar{9}$	$+\frac{8 \times 47}{35} m \epsilon^2$	$+\frac{556}{49} m \epsilon^2$
l. $\bar{8}$	$-\frac{967}{28} m \epsilon^2$	$-\frac{983}{28} m \epsilon^2$
p. 53, l. 2 et l. 13	$-\frac{621}{2240} m \epsilon^2$	$-\frac{767}{224 \times 14} m \epsilon^2$
l. 3 et l. 15	$-\frac{69}{224} m \epsilon^2$	$-\frac{37}{224} m \epsilon^2$
l. 10	$+ 0.005\ 288\ 376\ 454 \sin^2 \varphi$	$+ 0.005\ 288\ 377\ 958 \sin^2 \varphi$
	$- 0.000\ 005\ 890\ 251 \sin^2 2\varphi$	$- 0.000\ 005\ 884\ 635 \sin^2 2\varphi$
l. 13	$- 0.000\ 000\ 009\ 906$	$- 0.000000\ 008\ 423$

	<u>Au lieu de</u>	<u>Lire</u>
1. 14	— 0.000 000 009 724	— 0.000 000 004 108
p. 54, 1. $\bar{4}$	$X_{2j} X_{2j} \dots X_{2k}$	$X_{2j} X_{2k} \dots X_{2s}$
p. 56, 1. 2, 1. 3 et 1. $\bar{4}$	$a$	$a_m$
1. 11 et 1. 12	sec $\eta_1$ sec $\eta_2$	sec $\eta_1$ cos $\eta_1$
p. 57, 1. 8 et 1. $\bar{3}$	$a^3$	$a_m^3$
1. 12	de la sphère de rayon $a$	du sphéroïde de rayon $a_m$
p. 58, 1. 10	$\rho' = a' \cdot g$	$\rho' = r'^{-1} \cdot g$
1. 11	$\rho'' = a'' \cdot \gamma$	$\rho'' = R'^{-1} \cdot \gamma$
1. $\bar{3}$	$\frac{\left[ 1 + 3 \sum_{i=1}^{i=l} \alpha_i X'_{2i} + \dots + 3 \sum_{n=1}^{n=\infty} u'_n \right] \left[ 1 + \sum_{i=1}^{i=l} \delta_i X'_{2i} \right] a'^3}{\left[ 1 + 3 \sum_{i=1}^{i=l} \alpha_i X'_{2i} + \dots + 3 \sum_{n=1}^{n=\infty} u'_n \right] \left[ 1 + \sum_{i=1}^{i=l} \delta_i X'_{2i} \right] a'^3}$	$\frac{\left[ 1 + 3 \sum_{i=1}^{i=l} \alpha_i X'_{2i} + \dots + 3 \sum_{n=1}^{n=\infty} u'_n \right] a'^3}{\left[ 1 + 2 \sum_{i=1}^{i=l} \alpha_i X'_{2i} + \dots + 2 \sum_{n=1}^{n=\infty} u'_n \right] a'^2}$
1. $\bar{1}$	correction analogue	
p. 59, 1. 2 au dénominateur	$+ 3 \sum_{i=1}^{i=l} \alpha_i X'_{2i} + \dots + \sum_{n=1}^{n=\infty} (n+2) u'_n$	$+ 2 \sum_{i=1}^{i=l} \alpha_i X'_{2i} + \dots + \sum_{n=1}^{n=\infty} (n+1) u'_n$
1. 3       »	correction analogue	

LA GÉODÉSIE  
ET LA  
MÉTHODE GRAVIMÉTRIQUE

PAR

**L. BRAGARD**

DOCTEUR EN SCIENCES MATHÉMATIQUES



---

Mémoire présenté à la séance du 24 décembre 1948.

---

*A Monsieur l'Administrateur-Inspecteur*

*M. DEHALU,*

*en témoignage de profonde et respectueuse  
gratitude.*



## INTRODUCTION

Le problème fondamental que la géodésie se propose de résoudre est la détermination de la figure de la Terre. On sait que pour y parvenir on a recours à deux méthodes : l'une, géométrique, qui utilise le procédé des triangulations, l'autre, dynamique, qui fait appel aux mesures gravimétriques.

Mais tandis que la première fournit les dimensions et la figure de la Terre, la seconde ne donnait primitivement que sa forme. Nous ne nous occuperons que de cette dernière méthode, dont la théorie remonte à CLAIRAUT [1]. Une solution formelle a été indiquée par G. G. STOKES, qui a établi une relation entre la forme du géoïde et la variation de gravité à sa surface [2].

D'une manière explicite, nous entendons par figure de la Terre celle de la surface d'équilibre hydrostatique supposée réalisée en imaginant les océans réunis entre eux par des canaux et soustraits à toute influence perturbatrice, telles l'action luni-solaire, les différences de densité, etc.

STOKES a montré qu'il était possible de calculer la distance qui sépare chaque point de cette surface de niveau, ou géoïde, d'une surface de référence voisine de la sphère par les seules mesures de l'intensité de la pesanteur effectuées sur la Terre.

Soient, en effet, « E (fig. 1a, p. 62) la surface du sphéroïde de référence et A un point sur cette surface. En A menons une normale à E et prolongeons-la jusqu'en M (fig. 1b, p. 62) sur la géoïde G. Le point M sera déterminé si nous connaissons la longueur N du segment AM » [3, p. 97]. Désignons par  $\gamma$  la gravité rapportée au sphéroïde — on l'appelle gravité normale — et par  $g$  celle rapportée au géoïde. Pour comparer  $\gamma_A$  et  $g_M$ , nous pouvons, par la pensée, transporter  $\gamma_A$  le long de la normale AM. Nous obtiendrons ainsi  $\gamma_M$ . La différence  $g_M - \gamma_M = \Delta g$  représente l'anomalie totale vraie de la gravité en M. Pour faire la translation, il faut connaître N, qui en général n'est pas connu. La formule de CLAIRAUT nous permet seulement de connaître l'anomalie apparente définie par  $\Delta'g = g_M - g_A$ .

Mais considérons le rayon vecteur OA, qui rencontre le géoïde en M', et désignons par  $\omega$  l'angle MAM' (fig. 1a). Il a pour valeur

$$\varphi + \theta - \frac{\pi}{2},$$

$\varphi$  étant la latitude sphéroïdique et  $\theta$  l'argument du rayon vecteur OM'.

On aura donc

$$N = \Delta g' \sin(\varphi + \theta).$$

Mais comme  $\varphi + \theta$  est très voisin de  $90^\circ$ , on pourra prendre

$$N = \Delta r.$$

STOKES a démontré que

$$(A) \quad \Delta r = \frac{a}{gS} \int_s \Delta g f dS,$$

où  $a$  est le rayon moyen de la Terre,  $g$  la valeur moyenne de la pesanteur,  $\Delta g$  la différence des valeurs de la pesanteur aux centres de l'élément  $dS$  du géoïde et de l'élément correspondant de la surface de référence, l'intégrale étant étendue à toute la surface du géoïde. La fonction  $f$  est donnée par

$$(B) \quad f = \operatorname{cosec} \frac{\psi}{2} + 1 - 6 \sin \frac{\psi}{2} - 5 \cos \psi - 3 \cos \psi \log \left[ \sin \frac{\psi}{2} \left( 1 - \sin \frac{\psi}{2} \right) \right],$$

où  $\psi$  désigne la distance angulaire de l'élément  $dS$  du point où la distance entre les deux surfaces est cherchée.

Mais les mesures de  $g$  sont faites sur la Terre réelle; il faut donc les réduire au géoïde. Ce problème a été traité en détail par M. DEHALU, dans un mémoire publié par l'Institut Royal Colonial Belge [3]. Nous n'insisterons donc pas sur ce point.

Le principe sur lequel STOKES établit sa formule repose sur la relation fondamentale

$$g = \frac{d(v + w)}{dn},$$

qui exprime que les forces d'attraction exercées par la Terre sur les corps qui l'environnent dérivent d'un potentiel newtonien. A l'encontre de CLAIRAUT et LAPLACE, il ne fait aucune hypothèse sur la distribution de la matière à l'intérieur de la Terre.

Sa méthode consiste à partir du potentiel d'un sphéroïde peu différent d'une sphère, en un point extérieur, et à lui appliquer les ressources de la théorie des fonctions sphériques, suivant en cela l'exemple des travaux de LAPLACE.

Au cours de sa démonstration, il établit une expression de l'intensité de la pesanteur qui n'est autre que celle de CLAIRAUT :

$$\gamma = g_a \left[ 1 + \left( \frac{5}{2} m - \varepsilon \right) \sin^2 \varphi \right],$$

où  $\gamma$  est la gravité normale en un point de latitude  $\varphi$ ,  $g_a$  l'accélération de la pesanteur à l'équateur,  $\varepsilon$  l'aplatissement du sphéroïde et  $m$  le rapport de la force centrifuge équatoriale à la pesanteur équatoriale

$$m = \frac{\omega^2 a}{g_0},$$

où  $a$  est le rayon équatorial du sphéroïde.

La démonstration de STOKES limitée aux développements du premier ordre de l'aplatissement a suscité différents travaux dus à DARWIN [4], H. POINCARÉ [5], DE GRAAF HUNTER [6], ROSENBLATT et G. GARCIA [7].

DARWIN suppose que le géoïde diffère peu d'un sphéroïde et obtient les expressions des potentiels extérieur et intérieur en s'en tenant aux termes de l'ordre du carré de l'aplatissement. Remarquons, en passant, que la méthode de STOKES, comme celle de LAPLACE et DARWIN, présente un défaut, celui de se donner à priori le potentiel en supposant qu'il est développable en une série d'harmoniques solides, ce qui oblige de confondre la normale et le rayon vecteur au détriment de la rigueur de l'exposé.

H. POINCARÉ utilise d'abord les développements en fonctions sphériques, négligeant le carré de l'aplatissement. Il remplace ensuite les fonctions sphériques par les fonctions de LAMÉ. Il néglige, non plus le carré de l'aplatissement, mais celui du relèvement du géoïde au-dessus de l'ellipsoïde de référence, ce qui est une quantité beaucoup plus petite. Il montre ensuite dans quelle mesure on doit corriger les puissances supérieures de l'aplatissement, en même temps que le plus important des résultats subsiste, c'est-à-dire que la connaissance de l'intensité de la pesanteur en tous les lieux du globe suffit pour déterminer la forme du géoïde.

Plus récemment, en 1934, DE GRAAF HUNTER a indiqué une voie nouvelle et rigoureuse en déduisant le potentiel d'attraction de la Terre du théorème de GREEN. Ses résultats confirment et étendent la théorie de STOKES jusqu'à l'ordre du carré de l'aplatissement.

Enfin, en 1937-1938, A. ROSENBLATT et G. GARCIA, se plaçant à un point de vue mathématique plus général, ont montré que le théorème de STOKES se ramène à la résolution d'un système de deux équations intégrales-différentielles. En 1939, ROSENBLATT, supposant que la surface de référence est une sphère, a retrouvé la formule de STOKES en négligeant tout d'abord les termes de l'ordre de  $\omega^2$ , c'est-à-dire du premier ordre (cas statique). Il a indiqué ensuite des formules récurrentes entre les coefficients des harmoniques dans le cas où l'on conserve les mêmes termes.

Tous ces travaux incluent la formule de CLAIRAUT dans l'appareil de leur démonstration, ce qui laisse supposer que la formule de STOKES n'est valable qu'au même degré d'approximation [9, p. 163].

Or il n'en est rien, ainsi que nous nous proposons de le montrer au cours de ce travail. La formule de STOKES est générale pour tout sphéroïde peu différent d'une sphère, quel que soit l'ordre de son aplatissement, tandis que la formule de CLAIRAUT s'établit avec telle approximation que l'on voudra. Elle est d'ailleurs indépendante du géoïde et s'applique uniquement à la surface mathématique de référence choisie.

Une autre critique que l'on peut adresser aux travaux que nous avons signalés, c'est d'avoir négligé de démontrer la convergence de la série (B), qui est fondamentale pour l'intégration de (A).

Nous avons divisé notre travail en trois parties :

Dans la première, nous démontrons le théorème fondamental de la Géodésie dynamique. Comme cas particulier, nous retrouvons celui de la Géodésie statique, établi pour la première fois par le géodésien danois BUCHWALDT [8], qui en a donné une démonstration approchée au premier ordre. Nous utilisons ensuite notre résultat pour obtenir la formule de STOKES et nous démontrons la convergence de la série (B).

Dans la deuxième, nous avons entrepris l'exposé de l'inverse du théorème de STOKES, en partant du système d'équations qui nous avait servi à établir la formule proprement dite. Nous sommes ainsi parvenu à une relation générale entre la gravité et la variation de forme du géoïde en chacun de ses points, s'exprimant par la formule

$$(C) \quad \Delta g = \frac{G}{a^3} \iint_s f_1 \Delta r \, ds,$$

où  $f_1$  est une fonction de l'angle  $\psi$  que font les rayons passant par la station où l'on cherche  $\Delta g$  et l'élément  $dS$ ,  $\Delta r$  étant connu. Nous avons eu soin de démontrer la convergence de la série  $f_1$  comme nous l'avions fait pour la série (B).

Dans la troisième partie, nous partons du théorème de GREEN et nous en tirons le potentiel dû à l'attraction d'une surface de référence en un point M extérieur.

Nous avons suivi à cet égard la voie indiquée par DE GRAAF HUNTER, en lui apportant maintes simplifications.

Nous avons indiqué une méthode également simple et tout à fait générale par approximations successives dans l'établissement de la formule de l'intensité de la pesanteur. Nous avons obtenu les formules de l'intensité de la pesanteur aux premier, deuxième, troisième et quatrième ordres près et retrouvé ainsi les expressions de  $g$  obtenues par CLAIRAUT, STOKES, DE GRAAF HUNTER et, par la dernière, une expression confirmant celle de CASSINIS [10].

Nous avons reproduit en annexes certains développements qui auraient alourdi nos exposés et nous avons donné dans l'annexe 7 une note sur le déplacement du centre de gravité de la Terre sous l'influence de forces internes.

# LA GÉODÉSIE

ET

## LA MÉTHODE GRAVIMÉTRIQUE

---

### I. — ÉQUATION DU SPHÉROÏDE TERRESTRE.

Suivant la précision désirée, on fait usage, en géodésie, d'équations représentant d'une manière approchée un sphéroïde peu différent d'une sphère. Ainsi STOKES, dans son célèbre mémoire, s'est servi de la formule

$$r = a_m \left[ 1 + \varepsilon \left( \frac{1}{3} - \cos^2 \theta \right) \right] = a_m \left( 1 - \frac{2}{3} \varepsilon X_2 \right) \quad (1)$$

et DE GRAAF HUNTER de la formule

$$r = a_m \left[ 1 - \frac{2}{3} \varepsilon \left( 1 + \frac{23}{42} \varepsilon \right) X_2 + \frac{12}{35} \varepsilon^2 X_4 \right]. \quad (2)$$

Dans ces formules,  $r$  représente le rayon vecteur,  $\varepsilon$  l'aplatissement et  $a_m$  le rayon moyen de ces figures, c'est-à-dire

$$a_m = \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r \sin \theta \, d\theta \, d\varphi. \quad (3)$$

La formule (1) convient pour toutes les questions qui ne réclament pas une précision supérieure au premier degré de l'aplatissement, tandis que l'usage de la formule (2) s'impose si l'on veut poursuivre les démonstrations jusqu'au deuxième ordre de l'aplatissement.

---

(<sup>1</sup>) Conformément à la notation de Tisserand et d'Appell, nous désignerons les polynômes de Legendre ou harmoniques zonaux d'ordre  $n$  par  $X_n$ .



Nous allons établir une expression du sphéroïde plus générale qui les contient d'ailleurs toutes les deux, comme cas particuliers, et qui, comme elles, dérive de l'ellipsoïde de révolution à deux axes inégaux.

Cette expression nouvelle, qui ne complique pas les démonstrations, permet de généraliser certains résultats et de pousser les approximations, sans difficulté spéciale, bien au delà du deuxième ordre de l'aplatissement.

Nous partons de l'équation de l'ellipsoïde de révolution

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1, \quad (4)$$

où  $a$  et  $b$  sont respectivement les rayons équatorial et polaire.

Posons

$$b = a(1 - \varepsilon), \quad (5)$$

$\varepsilon$  étant l'aplatissement.

Or, on a

$$x^2 + y^2 = r^2 \sin^2 \theta, \quad z^2 = r^2 \cos^2 \theta,$$

d'où, pour l'équation (4), en tenant compte de (5),

$$\sin^2 \theta + \frac{\cos^2 \theta}{(1 - \varepsilon)^2} = \frac{a^2}{r^2} \quad \sin^2 \theta + (1 + 2\varepsilon) \cos^2 \theta = \frac{a^2}{r^2}$$

et

$$\frac{r}{a} = \frac{1}{(1 + 2\varepsilon \cos^2 \theta)^{1/2}} = 1 - \varepsilon \cos^2 \theta,$$

ou

$$r = a \left( 1 - \frac{\varepsilon}{3} - \frac{2}{3} \varepsilon X_2 \right). \quad (6)$$

Mais, en vertu de (3),

$$a_m = a \left( 1 - \frac{\varepsilon}{3} \right),$$

d'où

$$a = a_m \left( 1 + \frac{\varepsilon}{3} \right).$$

Remplaçant cette valeur dans (6), il vient

$$r = a_m \left( 1 + \frac{\varepsilon}{3} \right) \left( 1 - \frac{\varepsilon}{3} - \frac{2}{3} \varepsilon X_2 \right) = a_m \left( 1 - \frac{2}{3} \varepsilon X_2 \right),$$

en négligeant les termes en  $\varepsilon^2$ ; c'est l'équation (1).

Si nous poussons les développements qui précèdent jusqu'au deuxième ordre de l'aplatissement, nous trouvons successivement

$$\sin^2 \theta + (1 + 2\varepsilon + 3\varepsilon^2) \cos^2 \theta = \frac{a^2}{r^2},$$

ou

$$1 + (2\varepsilon + 3\varepsilon^2) \cos^2 \theta = \frac{a^2}{r^2};$$

d'où

$$\frac{r}{a} = [1 + 2\varepsilon (1 + \frac{3}{2}\varepsilon) \cos^2 \theta]^{-\frac{1}{2}} = 1 - \varepsilon (1 + \frac{3}{2}\varepsilon) \cos^2 \theta + \frac{3}{2}\varepsilon^2 \cos^4 \theta;$$

on a encore

$$a_m = a \left(1 - \frac{\varepsilon}{3} - \frac{\varepsilon^2}{5}\right);$$

d'où, si nous conservons les termes du deuxième ordre en  $\varepsilon$ ,

$$a = a_m \left(1 - \frac{\varepsilon}{3} - \frac{\varepsilon^2}{6}\right)^{-1} = a_m \left(1 + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{14}{45}\varepsilon^2\right)$$

et

$$\begin{aligned} r &= a_m \left(1 + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{14}{45}\varepsilon^2\right) \left(1 - \varepsilon \cos^2 \theta - \frac{3}{2}\varepsilon^2 \cos^2 \theta + \frac{3}{2}\varepsilon^2 \cos^4 \theta\right) \\ &= a_m \left(1 + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{14}{45}\varepsilon^2 - \varepsilon \cos^2 \theta - \frac{11}{6}\varepsilon^2 \cos^2 \theta + \frac{3}{2}\varepsilon^2 \cos^4 \theta\right). \end{aligned}$$

Or, on a

$$\cos^2 \theta = \frac{2}{3}X_2 + \frac{1}{3} \quad \cos^4 \theta = \frac{8}{35}X_4 + \frac{4}{7}X_2 + \frac{1}{5};$$

d'où

$$r = a_m \left[1 - \frac{2}{3}\varepsilon (1 + \frac{23}{42}\varepsilon) X_2 + \frac{12}{35}\varepsilon^2 X_4\right],$$

ce qui est l'équation (2).

Passons maintenant au troisième ordre de l'aplatissement; nous avons

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta (1 + 2\varepsilon + 3\varepsilon^2 + 4\varepsilon^3) = \frac{a^2}{r^2},$$

ou

$$1 + (2\varepsilon + 3\varepsilon^2 + 4\varepsilon^3) \cos^2 \theta = \frac{a^2}{r^2};$$

d'où

$$\begin{aligned} \frac{r}{a} &= [1 + 2\varepsilon (1 + \frac{3}{2}\varepsilon + 2\varepsilon^2) \cos^2 \theta]^{-\frac{1}{2}} = 1 - \varepsilon (1 + \frac{3}{2}\varepsilon + 2\varepsilon^2) \cos^2 \theta + \frac{3}{2}\varepsilon^2 (1 + 3\varepsilon) \cos^4 \theta \\ &\quad - \frac{5}{2}\varepsilon^3 \cos^6 \theta. \end{aligned}$$

Le rayon moyen, en vertu de (3), vaut

$$a_m = a \left(1 - \frac{\varepsilon}{3} - \frac{\varepsilon^2}{5} - \frac{13}{105} \varepsilon^3\right).$$

d'où l'on tire

$$a = a_m \left(1 - \frac{\varepsilon}{3} - \frac{\varepsilon^2}{5} - \frac{13}{105} \varepsilon^3\right)^{-1} = a_m \left(1 + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{14}{45} \varepsilon^2 + \frac{278}{27 \times 35} \varepsilon^3\right).$$

Il vient alors

$$\begin{aligned} r &= a_m \left(1 + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{14}{45} \varepsilon^2 + \frac{278}{27 \times 35} \varepsilon^3\right) \left[1 - \varepsilon \left(1 + \frac{3}{2} \varepsilon + 2\varepsilon^2\right) \cos^2 \theta + \frac{3}{2} \varepsilon^2 (1 + 3\varepsilon) \cos^4 \theta - \frac{5}{2} \varepsilon^3 \cos^6 \theta\right] \\ &= a_m \left[1 + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{14}{45} \varepsilon^2 + \frac{278}{27 \times 35} \varepsilon^3 - \varepsilon \left(1 + \frac{11}{6} \varepsilon + \frac{253}{90} \varepsilon^2\right) \cos^2 \theta + \varepsilon^2 \left(\frac{3}{2} + 5\varepsilon\right) \cos^4 \theta - \frac{5}{2} \varepsilon^3 \cos^6 \theta\right]. \end{aligned}$$

Sachant que

$$\cos^6 \theta = \frac{16}{231} X_6 + \frac{24}{77} X_4 + \frac{10}{21} X_2 + \frac{1}{7},$$

on a finalement

$$r = a_m \left[1 - \frac{2}{3} \varepsilon \left(1 + \frac{23}{42} \varepsilon + \frac{14}{45} \varepsilon^2\right) X_2 + 4\varepsilon^2 \left(\frac{3}{35} + \frac{\varepsilon}{11}\right) X_4 - \frac{40}{231} \varepsilon^3 X_6\right]. \quad (7)$$

Si l'on se bornait au quatrième ordre de  $\varepsilon$ , on aurait de même

$$\begin{aligned} r &= a_m \left[1 + (l_1 \varepsilon + m_1 \varepsilon^2 + n_1 \varepsilon^3 + p_1 \varepsilon^4) X_2 + (l_2 \varepsilon^2 + m_2 \varepsilon^3 + n_2 \varepsilon^4) X_4 \right. \\ &\quad \left. + (l_3 \varepsilon^3 + m_3 \varepsilon^4) X_6 + l_4 \varepsilon^4 X_8\right], \quad (9) \end{aligned}$$

où  $l, m, n$  et  $p$  sont des coefficients numériques.

Posons

$$A_i = l_i \varepsilon^i + m_i \varepsilon^{i+1} + n_i \varepsilon^{i+2} + p_i \varepsilon^{i+3} + \dots + r_i \varepsilon^l;$$

il vient pour (9)

$$r = a_m (1 + A_1 X_2 + A_2 X_4 + A_3 X_6 + A_4 X_8). \quad (10)$$

D'une manière générale on pourra donc écrire

$$r = a_m \left[1 + \sum_{i=1}^{i=l} A_i X_{2i}\right], \quad (11)$$

où  $A_i$  est un coefficient du  $i^{\circ}$  ordre de grandeur déterminé avec la précision du  $l^{\circ}$  ordre de l'aplatissement.

L'expression (11) est évidemment incomplète si l'on veut qu'elle représente le géoïde, car elle ne renferme que des harmoniques zonales, fonctions de la colatitude seule.

Pour épouser toutes les irrégularités de la figure (géoïde), nous devons ajouter des termes qui ne pourront être que du  $l^{\circ}$  ordre de grandeur de  $\varepsilon$ . En effet, la forme principale étant l'ellipsoïde (0), les détails de forme ne violant pas l'allure ellipsoïdale seront de l'ordre de la précision choisie  $\varepsilon^l$ . Les termes supplé-

mentaires ne pourront être d'ordre supérieur à  $\varepsilon^l$ , puisque nous nous limitons à cet ordre de précision. Ils ne peuvent pas être d'ordre inférieur à  $\varepsilon^l$ , car ils risqueraient de détruire, par compensation de termes zonaux, l'allure ellipsoïdale. D'ailleurs, les termes exprimant les détails de forme, ou certains d'entre ces termes, seraient du même ordre que des termes principaux caractérisant la nature géométrique de la figure fondamentale qui est un ellipsoïde; ce qu'on ne peut admettre. L'équation (11) sera donc complétée par une série d'harmoniques sphériques

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$$

d'ordre  $\varepsilon^l$ , destinés à rendre compte des détails de configuration du géoïde.

On a d'ailleurs

$$u_n = \sum_{p=0}^{p=n} (a_p \cos p\varphi + b_p \sin p\varphi) \frac{1}{2^n (n+p)!} (\mu^2 - 1)^{p/2} \frac{d^{n+p} (\mu^2 - 1)^n}{d\mu^{n+p}},$$

les coefficients  $a_p$  et  $b_p$  étant de l'ordre  $\varepsilon^l$  et  $\mu = \cos \theta$ .

On aura donc finalement pour l'équation du géoïde

$$r = a_m \left[ 1 + \sum_{i=1}^{i=l} A_i X_{2i} + \sum_{k=0}^{k=\infty} u_k \right], \quad (12)$$

$a_m$  étant une constante et non plus le rayon moyen qui devient maintenant

$$a_m (1 + u_0).$$

Du point de vue théorique auquel nous nous plaçons, nous supposons une terre en équilibre isostatique parfait.

L'équation (12) représentera donc le géoïde isostatique ou compensé, c'est-à-dire la surface de niveau extérieure de la Terre fictive déduite de la terre réelle par suppression et compensation des masses topographiques.

Pour réduire les mesures de gravité effectuées sur la Terre réelle au géoïde compensé, il faut leur faire subir quatre réductions successives :

- 1° la réduction à l'air libre au géoïde primitif;
- 2° la correction topographique;
- 3° la réduction isostatique représentant la variation de gravité causée par le déplacement des masses extérieures;
- 4° la réduction à l'air libre du géoïde primitif au géoïde compensé.

Si nous désignons par  $g$  l'intensité de la pesanteur ainsi corrigée, c'est-à-dire réduite au géoïde compensé, et par  $G_m$  une constante, la gravité moyenne sur cette surface devenant  $G_m(1 + v_0)$ , nous écrirons, par analogie avec la formule (12),

$$g = G_m \left[ 1 + \sum_{i=1}^{i=l} B_i X_{2i} + \sum_{k=0}^{k=\infty} v_k \right], \quad (13)$$

où les  $B_i$  sont des coefficients inconnus du  $i^{\circ}$  ordre de grandeur et  $v_k$  des harmoniques sphériques du  $l^{\circ}$  ordre de l'aplatissement  $\varepsilon$ .

Pour plus de simplicité, nous écrirons les équations (12) et (13) sous la forme

$$r = a_m(1 + A + u), \quad (14)$$

$$g = G_m(1 + B + v), \quad (15)$$

où

$$A = \sum_{i=1}^{i=l} A_i X_{2i}, \quad B = \sum_{i=1}^{i=l} B_i X_{2i}, \quad (16)$$

$$u = \sum_{k=0}^{k=\infty} u_k, \quad v = \sum_{k=0}^{k=\infty} v_k. \quad (17)$$

Nous allons maintenant démontrer le théorème suivant, qui peut être considéré comme le théorème fondamental de la géodésie dynamique.

## II. — FORMULE GÉNÉRALE DE LA GÉODÉSIE DYNAMIQUE.

**THÉORÈME.** — *Si une surface équipotentielle animée d'un mouvement de rotation uniforme de vitesse angulaire  $\omega$  peut être représentée par l'équation (12) et la gravité sur cette surface par l'équation (13), on a*

$$v_n = (n-1)u_n \quad n = 2, 3, \dots$$

Le potentiel d'attraction de surface en un point extérieur M est

$$V = \iint_S \frac{g}{\Delta} d\sigma + \frac{1}{2} \omega^2 r^2 \sin^2 \theta, \quad (18)$$

$\Delta$  étant la distance du point potential M' ( $r', \theta', \varphi'$ ) au point potentié M ( $r, \theta, \varphi$ ).

Ce potentiel est constant lorsque le point M est situé sur S. Nous avons

$$d\sigma = r'^2 \sec \tau_1 \sec \tau_2 \sin \theta' d\varphi' d\theta',$$

$\tau_1$  étant l'inclinaison de la normale sur le rayon vecteur OM de la surface et  $\tau_2$  celle du rayon du parallèle passant par M et de la normale à ce parallèle.

Or,

$$\sec \tau_1 = (1 + tg^2 \tau_1)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2} tg^2 \tau_1 - \frac{1}{8} tg^4 \tau_1 + \frac{1}{16} tg^6 \tau_1 + \dots$$

et

$$tg \tau_1 = \frac{1}{r'} \frac{dr'}{d\theta'}, \quad tg \tau_2 = \frac{1}{r'} \frac{dr'}{d\varphi'}.$$

Si l'on part de la formule (12), on constate que

$$\frac{dr'}{d\theta'} = a_m \left( \frac{dA'}{d\theta'} + \frac{du'}{d\theta'} \right), \quad \frac{dr'}{d\varphi'} = a_m \frac{dA'}{d\varphi'}.$$

D'autre part, on aura

$$\frac{1}{r'} = \frac{1}{a_m} (1 - A' - u' - \dots).$$

D'où

$$tg \tau_{\theta_1} = \frac{dA'}{d\theta'} - A' \frac{dA'}{d\theta'} + \frac{du'}{d\theta'} - \dots, \quad tg \tau_{\theta_2} = \frac{du'}{d\varphi'} - A' \frac{du'}{d\varphi'} - \dots,$$

et comme les puissances et produits de polynômes de LEGENDRE peuvent toujours s'exprimer en une somme de polynômes simples du même genre [Annexe 1] on aura finalement

$$\sec \tau_{\theta_1} \sec \tau_{\theta_2} = 1 + D',$$

où

$$D' = \delta_0 + \delta_1 X'_2 + \dots + \delta_l X'_{2l}, \quad (19)$$

$\delta_i$  étant un coefficient numérique défini avec la précision du  $l^e$  ordre.

Le premier terme de l'expression du potentiel (18) ou « terme statique » peut alors s'écrire,  $\frac{1}{\Delta}$  étant exprimé en une série de polynômes de LEGENDRE,

$$\iint_S \frac{h}{\Delta} d\sigma = G_m \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1}{r'^{n+1}} \iint_S (1 + B' + v') (1 + D') r'^{n+2} X'_n \sin \theta' d\theta' d\varphi', \quad (20)$$

$B'$ ,  $D'$  et  $v'$  étant les valeurs que prennent respectivement  $B$ ,  $D$  et  $v$  au point  $M'$ .

Or,

$$r' = a_m (1 + A' + u'),$$

$A'$  et  $u'$  étant respectivement les valeurs de  $A$  et  $u$  au point  $M'$ , et si l'on s'en tient à la précision du  $l^e$  ordre, on a, d'après (12),

$$\begin{aligned} r'^{n+2} &= a_m^{n+2} \left[ 1 + (n+2) \sum_{i=1}^{i=l} A_i X'_{2i} + \frac{(n+2)(n+1)}{2!} \sum_{j+k \leq l} c_{jk} A_j A_k X'_{2j} X'_{2k} + \dots \right. \\ &+ \left. \frac{(n+2)(n+1) \dots (n-l+3)}{l!} \sum_{j+\dots+s \leq l} A_j A_k \dots A_r A_s X'_{2j} X'_{2k} \dots X'_{2r} X'_{2s} + (n+2) \sum_{j=0}^{j=\infty} u'_j \right] \end{aligned}$$

$c_{jk}$  étant égal à 1 pour  $j = k$  et égal à 2, si  $j$  est différent de  $k$ .

Ainsi, on a explicitement, en vertu de (13), (19) et (20),

$$\begin{aligned} \iint_S \frac{g}{\Delta} d\sigma &= G_m a_m \sum_{n=0}^{n=\infty} \left( \frac{a_m}{r'} \right)^{n+1} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left[ 1 + \sum_{i=1}^{i=l} B_i X'_{2i} + \sum_{k=0}^{k=\infty} v'_k \right] \\ & \left[ 1 + \sum_{i=0}^{i=l} \delta_i X'_{2i} \right] \left[ 1 + (n+2) \sum_{i=1}^{i=l} A_i X'_{2i} + \frac{(n+2)(n+1)}{2!} \sum_{j+k \leq l} A_j A_k c_{jk} X'_{2j} X'_{2k} + \dots \right. \\ & \left. + \frac{(n+2)(n+1) \dots (n-l+3)}{l!} A_l^2 (X'_2)^l + (n+2) \sum_{j=0}^{j=\infty} u'_j \right] X'_n \sin \theta' d\theta' d\varphi', \end{aligned}$$

ou, en effectuant les produits indiqués et en s'en tenant à la précision du  $l^e$  ordre de grandeur,

$$\begin{aligned}
\iint_s \frac{g}{\Delta} d\sigma &= G_m a_m \sum_{n=0}^{n=\infty} \left(\frac{a_m}{r}\right)^{n+1} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left[1 + \sum_{i=1}^{i=l} B_i X'_{2i}\right. \\
&+ \sum_{k=0}^{k=\infty} v'_k + \sum_{i=0}^{i=l} \delta_i X'_{2i} + (n+2) \sum_{i=1}^{i=l} A_i X'_{2i} \\
&+ (n+2) \sum_{j+k=l} A_j B_k X'_{2j} X'_{2k} + (n+2) \sum_{j+k=l} A_j \delta_k X'_{2j} X'_{2k} \\
&+ \frac{(n+2)(n+1)}{2!} \sum_{j+k=l} c_{jk} A_j A_k X'_{2j} X'_{2k} \\
&+ \frac{(n+2)(n+1)}{2!} \sum_{j+k=l} c_{jk} A_j A_k B_r X'_{2j} X'_{2k} X'_{2r} \\
&+ \frac{(n+2)(n+1)}{2!} \sum_{j+k+r=l} c_{jk} A_j A_k \delta_r X'_{2j} X'_{2k} X'_{2r} + \dots \\
&+ \frac{(n+2)(n+1)\dots(n-l+3)}{l!} A_l (X'_2)^l \\
&+ (n+2) \sum_{j=0}^{j=\infty} u'_j X'_n \sin \theta^j d\theta^j d\varphi^j.
\end{aligned}$$

Exprimons maintenant les produits  $X'_{2j} X'_{2k} \dots X'_{2s}$  en fonction de  $X'_2, X'_4, \dots, X'_{2r}$ , où  $r=j+k+\dots s \leq l$  (cf. à l'Annexe I); il viendra

$$\begin{aligned}
\iint_s \frac{g}{\Delta} d\sigma &= G_m a_m \sum_{n=0}^{n=\infty} \left(\frac{a_m}{r}\right)^{n+1} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left[1 + \sum_{i=0}^{i=l} \varphi_i X'_{2i} + \sum_{k=0}^{k=\infty} v'_k\right. \\
&\quad \left.+ (n+2) \sum_{j=0}^{j=\infty} u'_j X'_n \sin \theta^j d\theta^j d\varphi^j\right],
\end{aligned}$$

les  $\varphi_i$  dépendant uniquement des  $A_i$ , des  $B_i$  et des  $\delta_i$ , et les contenant tout au plus à l'ordre  $l$ .

En vertu d'un théorème bien connu des fonctions sphériques, cette équation s'écrit

$$\begin{aligned}
\iint_s \frac{g}{\Delta} d\sigma &= 4\pi G_m a_m \left[ \frac{a_m}{r} + \sum_{i=0}^{i=l} \varphi_i \frac{X_{2i}}{4i+1} \left(\frac{a_m}{r}\right)^{2i+1}\right. \\
&\quad \left.+ \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{v_n}{2n+1} \left(\frac{a_m}{r}\right)^{n+1} + \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{n+2}{2n+1} u_n \left(\frac{a_m}{r}\right)^{n+1} \right]
\end{aligned}$$

ou encore, en remplaçant  $\frac{1}{r^{2i+1}}$  par sa valeur à la précision indiquée et en groupant les harmoniques de même degré,

$$\iint_s \frac{g}{\Delta} d\sigma = 4\pi G_m a_m \left[ 1 - \sum_{n=0}^{n=\infty} u_n + \sum_{i=0}^{i=l} \Phi_i X_{2i} + \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{v_n}{2n+1} + \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{n+2}{2n+1} u_n \right],$$

c'est-à-dire

$$\iint_s \frac{g}{\Delta} d\sigma = 4\pi G_m a_m \left[ 1 + \sum_{i=0}^{i=l} \Phi_i X_{2i} + \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{v_n}{2n+1} - \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{n-1}{2n+1} u_n \right].$$

Les  $\Phi_i$  sont des coefficients analogues aux  $\varphi_i$ .

Prenons maintenant le rapport de la force centrifuge équatoriale à la gravité équatoriale sur le géoïde compensé et posons

$$m = \frac{\omega^2 a}{G}, \quad (21)$$

quantité qui est de l'ordre de l'aplatissement de la surface d'équilibre, c'est-à-dire du premier ordre. Nous aurons, avec les notations qui précèdent,

$$a = a_m \left[ 1 + \sum_{i=1}^{i=l} A_i (X_{2i})_{\theta=\frac{\pi}{2}} + \sum_{j=0}^{j=\infty} (u_j)_{\theta=\frac{\pi}{2}} \right], \quad (22)$$

$$G = G_m \left[ 1 + \sum_{i=1}^{i=l} B_i (X_{2i})_{\theta=\frac{\pi}{2}} + \sum_{k=0}^{k=\infty} (v_k)_{\theta=\frac{\pi}{2}} \right]. \quad (23)$$

Par conséquent, à la précision choisie, le « terme dynamique » de (18) s'écrit

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \omega^2 r^2 \sin^2 \theta &= \frac{m G_m a_m}{3} (1 - X_2) \left[ 1 + \sum_{i=1}^{i=l-1} B_i (X_{2i})_{\theta=\frac{\pi}{2}} \right] \\ &\quad \left[ 1 + \sum_{i=1}^{i=l-1} A_i (X_{2i})_{\theta=\frac{\pi}{2}} \right]^{-1} \left[ 1 + \sum_{i=1}^{i=l-1} A_i X_{2i} \right]^2 \end{aligned} \quad (24)$$

ou, en effectuant les calculs et en négligeant les termes d'ordre supérieur à  $l$ ,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \omega^2 r^2 \sin^2 \theta &= \frac{m G_m a_m}{3} (1 - X_2) \left[ 1 + \sum_{i=1}^{i=l-1} B_i (X_{2i})_{\theta=\frac{\pi}{2}} \right] \\ &\quad \left[ 1 - \sum_{i=1}^{i=l-1} A_i (X_{2i})_{\theta=\frac{\pi}{2}} + \dots + (-1)^{l-1} A_1^{l-1} [(X_2)_{\theta=\frac{\pi}{2}}]^{l-1} \right]^{-1} \left[ 1 + 2 \sum_{i=1}^{i=l-1} A_i X_{2i} + \sum_{j+k \leq l-1} c_{jk} A_j A_k X_{2j} X_{2k} \right] \\ &= \frac{m G_m a_m}{3} \left[ 1 - X_2 + \sum_{i=1}^{i=l-1} B_i (X_{2i})_{\theta=\frac{\pi}{2}} - X_2 \sum_{i=1}^{i=l-1} B_i (X_{2i})_{\theta=\frac{\pi}{2}} \right. \\ &\quad \left. - \sum_{i=1}^{i=l-1} A_i (X_{2i})_{\theta=\frac{\pi}{2}} + X_2 \sum_{i=1}^{i=l-1} A_i (X_{2i})_{\theta=\frac{\pi}{2}} - \sum_{j+k \leq l-1} A_j B_k (X_{2j})_{\theta=\frac{\pi}{2}} (X_{2k})_{\theta=\frac{\pi}{2}} + \dots \right. \\ &\quad \left. + (-1)^{l-1} A_1^l [(X_2)_{\theta=\frac{\pi}{2}}]^{l-1} \right. \\ &\quad \left. + 2 \sum_{i=1}^{i=l-1} A_i X_{2i} - 2 X_2 \sum_{i=1}^{i=l-1} A_i X_{2i} + \dots + \sum_{j+k \leq l-1} c_{jk} A_j A_k X_{2j} X_{2k} \right. \\ &\quad \left. - X_2 \sum_{j+k \leq l-1} c_{jk} A_j A_k X_{2j} X_{2k} + \dots \right]. \end{aligned}$$



Exprimons encore les produits  $X_{2j}, X_{2k}, \dots, X_{2s}$ , en fonction de  $X_{2j}, X_{2j}, \dots, X_{2r}$  ( $r = j + k + \dots + s \leq l - 1$ ). Il viendra

$$\frac{1}{2} \omega^2 r^2 \sin^2 \theta = \frac{m G_m \alpha_m}{3} \left[ 1 + \sum_{i=0}^{i=l} \Psi_i X_{2i} \right], \quad (25)$$

les  $\Psi_i$  dépendant uniquement des  $A_i$  et des  $B_i$ , et les contenant tout au plus à l'ordre  $l - 1$ .

Nous pourrions donc écrire

$$V_S = 4\pi G_m \alpha_m \left[ 1 + \sum_{i=0}^{i=l} \Phi_i X_{2i} + \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{v_n}{2n+1} - \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{n-1}{2n+1} u_n \right] + \frac{m G_m \alpha_m}{3} \left[ 1 + \sum_{i=0}^{i=l} \Psi_i X_{2i} \right], \quad (26)$$

expression qui est constante.

Annulons les coefficients des harmoniques sphériques de même degré ainsi que ceux des harmoniques zonaux  $X_2, X_4, \dots, X_{2l}$ ; il vient

$$\begin{aligned} 4\pi G_m \alpha_m [1 + \Phi_0 + v_0 + u_0] + \frac{m G_m \alpha_m}{3} [1 + \Psi_0] &= C, \\ 4\pi G_m \alpha_m v_1 &= 0, \\ 4\pi G_m \alpha_m \left[ \frac{v_n}{2n+1} - \frac{n-1}{2n+1} u_n \right] &= 0 \quad (n = 2, 3 \dots), \\ 4\pi G_m \alpha_m \Phi_i + \frac{m G_m \alpha_m}{3} \Psi_i &= 0 \quad (i = 1 \dots l), \end{aligned}$$

ou, finalement,

$$\begin{aligned} v_0 &= -u_0 - 1 - \Phi_0 - \frac{m}{12\pi} (1 + \Psi_0) + \frac{C}{4\pi G_m \alpha_m}, \\ \Phi_i + \frac{m}{12\pi} \Psi_i &= 0 \quad (i = 1 \dots l), \\ v_1 &= 0 \quad v_n = (n-1) u_n \quad (n = 2 \dots), \end{aligned}$$

qui est la relation annoncée.

Si l'on ne considère que le cas statique, — purement idéal, — il suffit d'annuler les  $\Psi_i$ ; on retrouve encore la relation fondamentale

$$v_n = (n-1) u_n \quad (n = 2 \dots), \quad (27)$$

démontrée par BUCHWALDT au second ordre près.

Elle est donc indépendante de la précision avec laquelle on donne la surface de niveau, puisqu'elle subsiste quel que soit  $l$ ,  $l$  étant un entier positif quelconque.

III. — THÉORÈME DE STOKES.

Nous supposerons que le géoïde compensé peut être représenté par l'équation (14)

$$r = a_m(1 + A + u)$$

et nous imposerons à la surface de référence dont il sera question plus loin les deux conditions suivantes :

- 1° Le volume de la surface de référence est égal à celui du géoïde compensé;
- 2° Son centre de gravité coïncide avec celui du géoïde compensé et de la sphère de rayon  $a_m$ .

De la première condition (Annexe 2) découle l'égalité

$$u_0 = v_0;$$

$a_m$  redevient alors le rayon moyen; et de la seconde (Annexe 3)

$$u_1 = v_1 = 0.$$

De même, nous prendrons pour  $g$  la valeur exprimée par l'équation (15)

$$g = G_m(1 + B + v).$$

$G_m$  redevenant maintenant la gravité moyenne.

En vertu du théorème précédent, nous pourrions adjoindre à l'équation du géoïde compensé

$$r = a_m(1 + A + \sum_{n=2}^{n=\infty} u_n), \quad (28)$$

l'équation

$$g = G_m[1 + B + \sum_{n=2}^{n=\infty} (n-1) u_n]. \quad (29)$$

Mais la détermination de la figure du géoïde compensé, d'après les observations gravimétriques, est essentiellement rattachée à l'autre méthode de détermination de cette figure d'après les mesures géodésiques associées aux observations astronomiques de longitude, latitude et azimut. Comme dans l'établissement des triangulations, on utilise un ellipsoïde de référence, et comme il est à souhaiter que les observations géodésiques et gravimétriques soient comparables, nous devons choisir pour ces dernières une figure de référence.

Posons pour cela

$$u_n = v_n + w_n, \quad (n = 2 \dots), \quad (30)$$

$v_n$  étant supposé déterminé par un procédé quelconque et  $w_n$  inconnu.

Nous prendrons comme figure de référence la surface définie plus haut; nous la représenterons par l'équation

$$R = a_m (1 + A + \sum_{n=2}^{n=\infty} v_n) \quad (31)$$

et nous lui associerons l'équation

$$\gamma = G_m [1 + B + \sum_{n=2}^{n=\infty} (n-1) v_n], \quad (32)$$

$\gamma$  étant l'accélération de la pesanteur rapportée à cette surface.

Les équations (31) et (32) forment un système de référence et l'on a, en vertu de (30),

$$r - R = \Delta r = a_m \sum_{n=2}^{n=\infty} w_n; \quad (33)$$

$$g - \gamma = \Delta g = G_m \sum_{n=2}^{n=\infty} (n-1) w_n, \quad (34)$$

où  $\Delta g$  est la différence  $g - \gamma$  se rapportant au point  $(\theta, \varphi)$ .

Posons

$$\Delta g = G_m \sum_{n=2}^{n=\infty} (n-1) w_n \equiv G_m F(\theta, \varphi); \quad (35)$$

$w_n$  est une fonction des coordonnées angulaires  $(\theta, \varphi)$  de la station P où l'on calcule  $\Delta r$ , tandis que  $\Delta g$  dépend des coordonnées des points autres que P, situés sur le géoïde compensé. D'après un théorème connu des fonctions sphériques, nous pourrions donc écrire

$$(n-1) w_n = \frac{2n+1}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} F(\theta', \varphi') X_n \sin \theta' d\varphi' d\theta'; \quad (36)$$

d'où, en remplaçant  $F(\theta', \varphi')$  par  $\frac{\Delta g}{G_m}$ ,  $\Delta g$  se rapportant ici à l'élément potentiel  $(\theta', \varphi')$ ,

$$\sum_{n=2}^{n=\infty} w_n = \frac{1}{4\pi G_m} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \Delta g \sum_{n=2}^{n=\infty} \frac{2n+1}{n-1} X_n \sin \theta' d\theta' d\varphi'. \quad (37)$$

Posons encore

$$f = \sum_{n=2}^{n=\infty} \frac{2n+1}{n-1} X_n; \quad (38)$$

nous aurons

$$\Delta r = \frac{a_m}{4\pi G_m} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f \Delta g \sin \theta' d\theta' d\varphi'. \quad (39)$$

Supposons maintenant que dans cette dernière expression la direction à partir de laquelle  $\theta'$  est mesuré soit celle du rayon vecteur passant par la station P,

prise comme origine; supposons en outre que les angles  $\psi$  et  $\chi$  soient par rapport à cette station ce que  $\theta'$  et  $\varphi'$  sont par rapport au Pôle Nord et posons

$$\Delta j' = N,$$

distance du géoïde compensé à l'ellipsoïde de référence.

Nous pourrions alors écrire finalement

$$N = \frac{a_m}{4\pi G_m} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f \Delta g \sin \psi \, d\psi \, d\phi, \quad (40)$$

relation générale entre la forme du géoïde compensé et la variation de gravité à sa surface, qui n'est autre chose que la formule célèbre de STOKES [2].

Il reste maintenant à calculer  $f$ , dont la valeur est donnée par l'équation (38) et dépend de la convergence de la série.

CALCUL DE LA SÉRIE :

$$f = \sum_{n=2}^{n=\infty} \frac{2n+1}{n-1} X_n.$$

Elle peut s'écrire

$$f = 2 \sum_{n=2}^{n=\infty} X_n + 3 \sum_{n=2}^{n=\infty} \frac{X_n}{n-1}.$$

Pour le calcul du premier terme de cette expression, partons de la formule de LAPLACE :

$$X_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (\cos \psi + i \sin \psi \cos \omega)^n \, d\omega. \quad (41)$$

Si nous posons

$$q = \cos \psi + i \sin \psi \cos \omega, \quad (42)$$

la série (41) s'écrit

$$\sum_{n=2}^{n=\infty} X_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sum_{n=2}^{n=\infty} q^n \, d\omega.$$

Cette série convergera pour  $|\cos \psi| < 1$ , si 1° le module de  $q$  est inférieur à 1, ce qui est vérifié; 2° l'intégrale du second membre a une valeur finie et déterminée pour  $|\cos \psi| < 1$ .

Puisque  $|q| < 1$ , on a

$$\sum_{n=2}^{n=\infty} q^n = \frac{q^2}{1-q} = \frac{1}{1-q} - 1 - q.$$

D'où

$$\sum_{n=2}^{n=\infty} X_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{d\omega}{1-q} - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi d\omega - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi q \, d\omega,$$

ou, explicitement,

$$\sum_{n=2}^{n=\infty} X_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{d\omega}{1 - \cos \psi - i \sin \psi \cos \omega} - 1 - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (\cos \psi + i \sin \psi \cos \omega) d\omega.$$

L'intégrale du second terme de la dernière intégrale est nulle. Si nous désignons par J la première intégrale, il vient

$$\sum_{n=2}^{n=\infty} X_n = \frac{1}{\pi} J - 1 - \cos \psi;$$

on a d'ailleurs

$$J = \frac{1}{2 \sin \frac{\psi}{2}} \int_0^\pi \frac{d\omega}{\sin \frac{\psi}{2} - i \cos \frac{\psi}{2} \cos \omega}$$

ou, en passant au camp complexe, en posant  $e^{i\omega} = z$  et en intégrant suivant le contour du cercle  $\Gamma$  de rayon unitaire,

$$J = \frac{1}{4 \sin \frac{\psi}{2}} \int_{\Gamma} \frac{dz}{i z \left[ \sin \frac{\psi}{2} - i \cos \frac{\psi}{2} \frac{z^2 + 1}{2z} \right]} = \frac{1}{2 i \sin \frac{\psi}{2}} \int_{\Gamma} \frac{dz}{(-i \cos \frac{\psi}{2}) (z - a) (z - b)},$$

où

$$a = \frac{\sin \frac{\psi}{2} - 1}{i \cos \frac{\psi}{2}} \quad b = \frac{\sin \frac{\psi}{2} + 1}{i \cos \frac{\psi}{2}}.$$

Comme  $|a| < 1$  et  $|b| > 1$ , le point  $a$  est un pôle simple et le résidu de la fonction  $y$  est  $\frac{1}{a - b}$ . On a donc

$$\int_{\Gamma} \frac{dz}{(z - a)(z - b)} = \frac{2 i \pi}{a - b};$$

d'où

$$J = \frac{1}{2 i \sin \frac{\psi}{2} \left( -\cos \frac{\psi}{2} \right)} \cdot \frac{2 i \pi \left( -i \cos \frac{\psi}{2} \right)}{2} = \frac{\pi}{2 \sin \frac{\psi}{2}}$$

et, finalement,

$$\sum_{n=2}^{n=\infty} X_n = \frac{1}{2 \sin \frac{\psi}{2}} - 1 - \cos \psi, \quad (43)$$

expression qui a une valeur finie et déterminée pour  $|\cos \psi| < 1$ .

Ce résultat a déjà été signalé par CATALAN en 1881 [12].

CALCUL DE

$$\sum_{n=2}^{n=\infty} \frac{X_n}{n-1}.$$

Cette série s'écrit avec les notations antérieures

$$\sum_{n=2}^{n=\infty} \frac{X_n}{n-1} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sum_{n=2}^{n=\infty} \frac{q^n}{n-1} d\omega. \quad (44)$$

Elle converge sous les mêmes conditions.

Posons

$$\sum_{n=2}^{n=\infty} \frac{q^n}{n-1} \equiv q \sum_{n=2}^{n=\infty} \frac{q^{n-1}}{n-1} = q \gamma.$$

Puisque  $|q| < 1$ , on a

$$\frac{d\gamma}{dq} = \sum_{n=2}^{n=\infty} q^{n-2} = \frac{1}{1-q};$$

d'où

$$\gamma = -L(1-q)$$

et, finalement,

$$\sum_{n=2}^{n=\infty} \frac{q^n}{n-1} = -q L(1-q).$$

La formule (44) s'écrira donc

$$\sum_{n=2}^{n=\infty} \frac{X_n}{n-1} = -\frac{\pi}{1} \int_0^\pi q L(1-q) d\omega$$

ou, d'après (42),

$$\sum_{n=2}^{n=\infty} \frac{X_n}{n-1} = -\frac{1}{\pi} \int_0^\pi (\cos \psi + i \sin \psi \cos \omega) L(1 \cos \omega - i \sin \psi \cos \omega) d\omega \equiv -\frac{J}{\pi}.$$

Il faut démontrer que cette intégrale a une valeur finie et déterminée pour  $|\cos \psi| < 1$ .

Cette expression peut s'écrire

$$\begin{aligned} J &= \cos \psi \int_0^\pi L(1 - \cos \psi - i \sin \psi \cos \omega) d\omega + i \sin \psi \int_0^\pi \cos \omega L(1 - \cos \psi - i \sin \psi \cos \omega) d\omega \\ &\equiv J_1 + J_2. \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} J_1 &= \cos \psi \int_0^\pi L(1 - \cos \psi - i \sin \psi \cos \omega) d\omega = \cos \psi \int_0^\pi L 2 \sin \frac{\psi}{2} \left( \sin \frac{\psi}{2} - \cos \frac{\psi}{2} \cos \omega \right) d\omega; \\ J_1 &= \cos \psi \int_0^\pi L 2 \sin \frac{\psi}{2} d\omega + \cos \psi \int_0^\pi L \left( \sin \frac{\psi}{2} - i \cos \frac{\psi}{2} \cos \omega \right) d\omega \\ &= \pi \cos \psi L 2 \sin \frac{\psi}{2} + \cos \psi \int_0^\pi L \left( \sin \frac{\psi}{2} - i \cos \frac{\psi}{2} \cos \omega \right) d\omega. \end{aligned}$$

Pour le calcul du second terme de cette expression, nous passons au champ complexe en posant  $e_i^\omega = z$ , d'où  $\cos \omega = \frac{z^2+1}{2z}$ , en désignant par  $\Gamma$  la circonférence de centre O et de rayon  $|z|=1$ , après avoir transformé l'intégrale entre les limites  $-\pi$  et  $+\pi$ ; il vient

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{+\pi} L \left( \sin \frac{\psi}{2} - i \cos \frac{\psi}{2} \cos \omega \right) d\omega &= \frac{1}{2} \int_{\Gamma} L \left( \sin \frac{\psi}{2} - i \cos \frac{\psi}{2} \frac{z^2+1}{2z} \right) \frac{dz}{iz} \\ &= \frac{1}{2} L \left( -\frac{i}{2} \cos \frac{\psi}{2} \right) \int_{\Gamma} \frac{dz}{iz} + \frac{1}{2} \int_{\Gamma} L \frac{z-a}{z} \frac{dz}{iz} + \frac{1}{2} \int_{\Gamma} L (z-b) \frac{dz}{iz}, \end{aligned}$$

où

$$a = \frac{\sin \frac{\psi}{2} - 1}{i \cos \frac{\psi}{2}} \quad b = \frac{\sin \frac{\psi}{2} + 1}{i \cos \frac{\psi}{2}} \quad \text{avec } |a| < 1 \text{ et } |b| > 1 \text{ pour } |\cos \psi| < 1.$$

Calculons séparément les trois intégrales qui précèdent :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} L \left( -\frac{i}{2} \cos \frac{\psi}{2} \right) \int_{\Gamma} \frac{dz}{iz} &= \pi L \left( -\frac{i}{2} \cos \frac{\psi}{2} \right) \\ \frac{1}{2} \int_{\Gamma} L \left( \frac{z-a}{z} \right) \frac{dz}{iz} &= \frac{1}{2} \int_{\Gamma} L \left( 1 - \frac{a}{z} \right) \frac{dz}{iz} = 0, \end{aligned}$$

car le point  $z$  se déplaçant sur la circonférence unitaire, on a toujours  $|a| < |z|$ .

$$\frac{1}{2} \int_{\Gamma} L (z-b) \frac{dz}{iz} = \pi A_{-1},$$

$A_{-1}$  étant le résidu de la fonction en  $z=0$ . On trouve

$$A_{-1} = L(-b);$$

d'où

$$\frac{1}{2} \int_{\Gamma} L (z-b) \frac{dz}{iz} = \pi L \left( 1 + \sin \frac{\psi}{2} \right) - \pi L \left( -i \cos \frac{\psi}{2} \right);$$

au total

$$\begin{aligned} \int_0^\pi L \left( \sin \frac{\psi}{2} - i \cos \frac{\psi}{2} \cos \omega \right) d\omega &= \pi L \left( -i \cos \frac{\psi}{2} \right) + \pi L \left( 1 + \sin \frac{\psi}{2} \right) - \pi L \left( -i \cos \frac{\psi}{2} \right) \\ &\quad - \pi L 2 = \pi L \left( 1 + \sin \frac{\psi}{2} \right) - \pi L 2 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} J_1 &= \pi \cos \psi [L 2 + L \sin \frac{\psi}{2} + L \left( 1 + \sin \frac{\psi}{2} \right) - L 2] = \pi \cos \psi L \left\{ \sin \frac{\psi}{2} \left( 1 + \sin \frac{\psi}{2} \right) \right\}; \\ J_2 &= i \sin \psi \int_0^\pi \cos \omega L (1 - \cos \psi - i \sin \psi \cos \omega) d\omega = i \sin \psi L 2 \sin \frac{\psi}{2} \int_0^\pi \cos \omega d\omega \\ &\quad + i \sin \psi \int_0^\pi \cos \omega L \left( \sin \frac{\psi}{2} - i \cos \frac{\psi}{2} \cos \omega \right) d\omega. \end{aligned}$$

La première intégrale du second membre est nulle.

Pour calculer la seconde intégrale, nous procédons comme précédemment, en passant au champ complexe; nous avons

$$\begin{aligned} J_2 &= \frac{i \sin \psi}{2} \int_{\Gamma} \frac{z^2 + 1}{2z} L \frac{-i \cos \frac{\psi}{2} (z - a)(z - b)}{2z} \frac{dz}{iz} \\ &= \frac{\sin \psi}{4} L \left( -\frac{i}{2} \cos \frac{\psi}{2} \right) \int_{\Gamma} \frac{z^2 + 1}{z^2} dz + \frac{\sin \psi}{4} \int_{\Gamma} \frac{z^2 + 1}{z^2} L \frac{z - a}{z} dz \\ &\quad + \frac{\sin \psi}{4} \int_{\Gamma} \frac{z^2 + 1}{z^2} L (z - b) dz. \end{aligned}$$

Calculons séparément ces intégrales :

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \frac{z^2 + 1}{z^2} dz &= 0; \\ \int_{\Gamma} \frac{z^2 + 1}{z^2} L \frac{z - a}{z} dz &= \int_{\Gamma} \frac{z^2 + 1}{z^2} L \left( 1 - \frac{a}{z} \right) dz = -2i\pi a \\ &\quad - 2\pi \frac{1 - \sin \frac{\psi}{2}}{\cos \frac{\psi}{2}}; \\ \int_{\Gamma} \frac{z^2 + 1}{z^2} L (z - b) dz &= 2i\pi B_{-2}, \end{aligned}$$

$B_{-2}$  étant le résidu de la fonction au pôle du second ordre en  $z=0$ . On a  $B_{-2} = -\frac{1}{b}$ .

D'où

$$\int_{\Gamma} \frac{z^2 + 1}{z^2} L (z - b) dz = 2\pi \frac{\cos \frac{\psi}{2}}{1 + \sin \frac{\psi}{2}}.$$

Au total

$$\begin{aligned} J_2 &= \frac{2\pi \sin \psi}{4} \left[ \frac{1 - \sin \frac{\psi}{2}}{\cos \frac{\psi}{2}} + \frac{\cos \frac{\psi}{2}}{1 + \sin \frac{\psi}{2}} \right] \\ &= \pi \sin \frac{\psi}{2} \left[ 1 - \sin \frac{\psi}{2} + \frac{1 - \sin^2 \frac{\psi}{2}}{1 + \sin \frac{\psi}{2}} \right] \\ &= 2\pi \sin \frac{\psi}{2} \left( 1 - \sin \frac{\psi}{2} \right). \end{aligned}$$



Finalement

$$J = J_1 + J_2 = \pi \left[ \cos \psi L \left\{ \sin \frac{\psi}{2} \left( 1 + \sin \frac{\psi}{2} \right) + 2 \sin \frac{\psi}{2} \left( 1 - \sin \frac{\psi}{2} \right) \right\} \right]$$

et

$$\sum_{n=2}^{n=\infty} \frac{X_n}{n-1} = -\frac{1}{\pi} J = -\cos \psi L \left[ \sin \frac{\psi}{2} \left( 1 + \sin \frac{\psi}{2} \right) \right] - 2 \sin \frac{\psi}{2} \left( 1 - \sin \frac{\psi}{2} \right),$$

fonction qui reste finie et déterminée pour  $|\cos \psi| < 1$ . On a donc

$$f = \frac{1}{\sin \frac{\psi}{2}} + 1 - 5 \cos \psi - 6 \sin \frac{\psi}{2} - 3 \cos \psi L \left[ \sin \frac{\psi}{2} \left( 1 + \sin \frac{\psi}{2} \right) \right] \quad (45)$$

#### IV. — LE PROBLÈME INVERSE.

Reprenons les équations (33) et (34), à savoir

$$\Delta r = a_m \sum_{n=2}^{n=\infty} w_n \quad \Delta g = G_m \sum_{n=2}^{n=\infty} (n-1) w_n.$$

Posons

$$\sum_{n=2}^{n=\infty} w_n \equiv F_1(\theta, \varphi).$$

Nous aurons, en vertu d'un théorème connu des fonctions sphériques,

$$w_n = \frac{2n+1}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} F_1(\theta', \varphi') X_n \sin \theta' d\theta' d\varphi';$$

d'où, en remplaçant  $F_1(\theta', \varphi')$  par  $\frac{\Delta r'}{a_m}$ ,

$$\sum_{n=2}^{n=\infty} (n-1) w_n = \frac{1}{4\pi a_m} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \Delta r' \sum_{n=2}^{n=\infty} (2n+1)(n-1) X_n \sin \theta' d\theta' d\varphi',$$

où  $w_n$  est une fonction des coordonnées angulaires  $(\theta, \varphi)$  de la station P où l'on calcule  $\Delta g$ , tandis que  $\Delta r$  dépend des coordonnées  $(\theta', \varphi')$  des points autres que P situés sur le géoïde compensé.

Posons encore

$$f_1 = \sum_{n=2}^{n=\infty} (2n+1)(n-1) X_n.$$

Nous aurons

$$\Delta g = \frac{G_m}{4\pi a_m} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f_2 \Delta r' \sin \theta' d\theta' d\varphi'.$$

Si nous effectuons un changement de variable analogue à celui de la première partie, nous aurons finalement

$$\Delta g = \frac{G_m}{4\pi a_m} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f_1 \Delta r \sin \psi \, d\psi \, d\chi,$$

relation générale entre les anomalies de gravité à la surface du géoïde compensé et la variation de forme en chacun de ses points, qui pourrait éventuellement servir à comparer les valeurs calculées aux valeurs observées de la gravité et permettre ainsi de vérifier la validité des hypothèses fondamentales de la Géodésie.

Nous écrirons plus simplement

$$\Delta g = \frac{G_m}{a_m S} \int_S f_1 \Delta r \, dS,$$

S étant la surface de la sphère de volume égal à celui du géoïde compensé et  $dS$  un élément de cette surface.  $\Delta r$  est l'écart local relatif à l'élément  $dS$ .

Nous remarquerons qu'il n'est plus nécessaire de présupposer la coïncidence des centres de gravité du géoïde compensé et de la figure de référence, comme pour la formule de STOKES.

Il reste maintenant à calculer  $f_1$ .

$$f_1 = 2 \sum_{n=2}^{n=\infty} n^2 X_n - \sum_{n=2}^{n=\infty} n X_n - \sum_{n=2}^{n=\infty} X_n.$$

On trouve (voir détail des calculs ci-dessous)

$$\sum_{n=2}^{n=\infty} n^2 X_n = \frac{1}{8 \sin \frac{\psi}{2}} - \frac{1}{8 \sin^3 \frac{\psi}{2}} - \cos \psi,$$

$$\sum_{n=2}^{n=\infty} n X_n = -\frac{1}{4 \sin \frac{\psi}{2}} - \cos \psi,$$

$$\sum_{n=2}^{n=\infty} X_n = \frac{1}{2 \sin \frac{\psi}{2}} - 1 - \cos \psi,$$

$\psi$  étant l'angle compris entre les rayons vecteurs  $r$  et  $r'$ . On en conclut donc que

$$f_1 = 1 - \frac{1}{4 \sin^3 \frac{\psi}{2}}. \quad (46)$$

On remarquera que dans les applications éventuelles de cette formule, la valeur  $\psi=0$ , correspondant à la station P, n'intervient pas.

CALCUL DE

$$\sum_{n=2}^{n=\infty} (2n+1)(n-1)X_n.$$

Cette série peut s'écrire

$$\sum_{n=2}^{n=\infty} (2n+1)(n-1)X_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{n=2}^{n=\infty} (2n+1)(n-1)q^n d\omega,$$

où  $|q| < 1$  pour  $|\cos \psi| < 1$ . Elle convergera pour  $|\cos \psi| < 1$ , si l'intégrale du second membre a une valeur finie et déterminée pour  $|\cos \psi| < 1$ .

La série figurant sous l'intégrale est absolument et uniformément convergente pour  $|\cos \psi| < 1$ . En effet,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|U_{n+1}|}{|U_n|} = \frac{(2n+3)n}{(2n+1)(n-1)} \cdot \frac{|q|^{n+1}}{|q|^n} = |q| < 1.$$

Évaluons-la :

$$\sum_{n=2}^{n=\infty} (2n+1)(n-1)q^n = 2 \sum_{n=2}^{n=\infty} n^2 q^n - \sum_{n=2}^{n=\infty} n q^n - \sum_{n=2}^{n=\infty} q^n.$$

Or, nous avons

$$\sum_{n=2}^{n=\infty} q^n = \frac{1}{1-q} - 1 - q.$$

Dérivons terme à terme. Il vient

$$\sum_{n=2}^{n=\infty} n q^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2} - 1,$$

ou, en multipliant les deux membres par  $q$ ,

$$\sum_{n=2}^{n=\infty} n q^n = \frac{q}{(1-q)^2} - q.$$

Nous aurons de même

$$\sum_{n=2}^{n=\infty} n^2 q^{n-1} = \frac{1+q}{(1-q)^3} - 1,$$

ou

$$\sum_{n=2}^{n=\infty} n^2 q^n = \frac{q(1+q)}{(1-q)^3} - q.$$

D'où

$$\sum_{n=2}^{n=\infty} (2n+1)(n-1)q^n = \frac{2q(1+q)}{(1-q)^3} - \frac{q}{(1-q)^3} - \frac{1}{1-q} + 1.$$

Posons

$$\frac{q(1+q)}{(1-q)^3} = \frac{A}{1-q} + \frac{B}{(1-q)^2} + \frac{C}{(1-q)^3};$$

$$\frac{q}{(1-q)^2} = \frac{E}{1-q} + \frac{F}{(1-q)^2}.$$

L'identification nous donnera

$$A = 1 \quad B = -3, \quad C = 2,$$

$$E = -1 \quad F = 1.$$

Par conséquent,

$$\sum_{n=2}^{n=\infty} (2n+1)(n-1)q^n = \frac{2}{1-q} - \frac{6}{(1-q)^2} + \frac{4}{(1-q)^3} + \frac{1}{1-q} - \frac{1}{(1-q)^2} - \frac{1}{1-q} + 1,$$

$$= 1 + \frac{2}{1-q} - \frac{7}{(1-q)^2} + \frac{4}{(1-q)^3}.$$

Ainsi,

$$\sum_{n=2}^{n=\infty} (2n+1)(n-1)P_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi d\omega + \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{d\omega}{1-q} - \frac{7}{\pi} \int_0^\pi \frac{d\omega}{(1-q)^2} + \frac{4}{\pi} \int_0^\pi \frac{d\omega}{(1-q)^3},$$

$$= 1 + \frac{1}{\sin \frac{\psi}{2}} - \frac{7}{\pi} \int_0^\pi \frac{d\omega}{(1-q)^2} + \frac{4}{\pi} \int_0^\pi \frac{d\omega}{(1-q)^3}.$$

Calculons séparément les deux dernières intégrales. Nous avons

$$\int_0^\pi \frac{d\omega}{(1-q)^2} = \int_0^\pi \frac{d\omega}{(1 - \cos \psi - i \sin \psi \cos \omega)^2} = \frac{1}{\left(2 \sin \frac{\psi}{2}\right)^2} \int_0^\pi \frac{d\omega}{\left(\sin \frac{\psi}{2} - i \cos \frac{\psi}{2} \cos \omega\right)^2},$$

ou, en passant au champ complexe,

$$\int_0^\pi \frac{d\omega}{(1-q)^2} = \frac{1}{2i} \cdot \frac{1}{\left(2 \sin \frac{\psi}{2}\right)^2} \int_\Gamma \frac{dz}{\frac{z \left(-i \cos \frac{\psi}{2}\right)^2 (z-a)^2 (z-b)^2}{4z^2}}$$

$$= \frac{1}{2i} \cdot \frac{1}{\sin^2 \frac{\psi}{2}} \cdot \frac{1}{\left(-i \cos \frac{\psi}{2}\right)^2} \int_\Gamma \frac{z dz}{(z-a)^2 (z-b)^2}.$$

Or,

$$\int_\Gamma \frac{z dz}{(z-a)^2 (z-b)^2} = 2i\pi \cdot A_{-2},$$

$A_{-2}$  étant le résidu de la fonction au pôle du second ordre  $z=a$ .

$$A_{-2} = \lim_{z=a} \frac{d}{dz} \left[ \frac{z}{(z-b)^2} \right] = - \left[ \frac{z+b}{(z-b)^3} \right]_{z=a} = - \frac{a+b}{(a-b)^3},$$

ou, explicitement,

$$A_{-2} = - \frac{\frac{-\sin \frac{\psi}{2} + 1 - \sin \frac{\psi}{2} - 1}{-i \cos \frac{\psi}{2}}}{\left( \frac{-\sin \frac{\psi}{2} + 1 + \sin \frac{\psi}{2} + 1}{-i \cos \frac{\psi}{2}} \right)^3} = \sin \frac{\psi}{2} \frac{\left( -i \cos \frac{\psi}{2} \right)^2}{4}.$$

D'où

$$\int_0^\pi \frac{d\omega}{(1-q)^2} = \frac{1}{2i} \cdot \frac{1}{\sin^2 \frac{\psi}{2}} \cdot \frac{1}{\left( -i \cos \frac{\psi}{2} \right)^2} \cdot 2i\pi \sin \frac{\psi}{2} \frac{\left( -i \cos \frac{\psi}{2} \right)^2}{4}$$

$$= \frac{\pi}{4 \sin \frac{\psi}{2}}.$$

De même,

$$\int_0^\pi \frac{d\omega}{(1-q)^3} = \int_0^\pi \frac{d\omega}{(1 - \cos \psi - i \sin \psi \cos \omega)^3} = \frac{1}{\left( 2 \sin \frac{\psi}{2} \right)^3} \int_0^\pi \frac{d\omega}{\left( \sin \frac{\psi}{2} - i \cos \frac{\psi}{2} \cos \omega \right)^3},$$

ou, en passant au champ complexe,

$$\int_0^\pi \frac{d\omega}{(1-q)^3} = \frac{1}{2i} \cdot \frac{1}{\left( 2 \sin \frac{\psi}{2} \right)^3} \int_{\Gamma} \frac{dz}{z \frac{\left( -i \cos \frac{\psi}{2} \right)^3 (z-a)^3 (z-b)^3}{2^3 z^3}}$$

$$= \frac{1}{2i} \cdot \frac{1}{\sin^3 \frac{\psi}{2}} \cdot \frac{1}{\left( -i \cos \frac{\psi}{2} \right)^3} \int_{\Gamma} \frac{z^2 dz}{(z-a)^3 (z-b)^3}.$$

Or,

$$\int_{\Gamma} \frac{z^2 dz}{(z-a)^3 (z-b)^3} = 2i\pi A_{-3},$$

$A_{-3}$  étant le résidu de la fonction au pôle du troisième ordre  $z=a$ .

$$A_{-3} = \frac{1}{2!} \lim_{z \rightarrow a} \frac{d^2}{dz^2} \left[ \frac{z^2}{(z-b)^3} \right].$$

Comme

$$\frac{d}{dz} \left[ \frac{z^2}{(z-b)^3} \right] = - \frac{z^2 + 2bz}{(z-b)^4},$$

nous aurons

$$\frac{d^2}{dz^2} \left[ \frac{z^2}{(z-b)^3} \right] = - \frac{d}{dz} \left[ \frac{z^2 + 2bz}{(z-b)^4} \right] = \frac{2(z^2 + 4bz + b^2)}{(z-b)^5}$$

d'où

$$A_{-3} = \left[ \frac{z^2 + 4bz + b^2}{(z-b)^5} \right]_{z=a} = \frac{a^2 + 4ab + b^2}{(a-b)^5},$$

ou, explicitement,

$$\begin{aligned} A_{-3} &= \frac{\sin^2 \frac{\psi}{2} - 2 \sin \frac{\psi}{2} + 1 + 4 \sin^2 \frac{\psi}{2} - 4 + \sin^2 \frac{\psi}{2} + 2 \sin \frac{\psi}{2} + 1}{\left( -i \cos \frac{\psi}{2} \right)^2} \\ &= \frac{\left( -\sin \frac{\psi}{2} + 1 + \sin \frac{\psi}{2} + 1 \right)^2}{\left( -i \cos \frac{\psi}{2} \right)^3} \\ &= \frac{-1 + 3 \sin^2 \frac{\psi}{2}}{2^4} \left( -i \cos \frac{\psi}{2} \right)^3. \end{aligned}$$

Nous en concluons que

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \frac{d\omega}{(1-q)^3} &= \frac{1}{2i} \cdot \frac{1}{\sin^3 \frac{\psi}{2}} \cdot \frac{1}{\left( -i \cos \frac{\psi}{2} \right)^3} \cdot 2i\pi \frac{-1 + 3 \sin^2 \frac{\psi}{2}}{2^4} \cdot \left( -i \cos \frac{\psi}{2} \right)^3 \\ &= \pi \frac{3 \sin^2 \frac{\psi}{2} - 1}{16 \sin^3 \frac{\psi}{2}}. \end{aligned}$$

Il viendra finalement

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{\infty} (2n+1)(n-1) X_n &= 1 + \frac{1}{\sin \frac{\psi}{2}} - \frac{7}{4 \sin \frac{\psi}{2}} + \frac{12}{16 \sin \frac{\psi}{2}} - \frac{4}{16 \sin^3 \frac{\psi}{2}} \\ &= 1 - \frac{1}{4 \sin^3 \frac{\psi}{2}}, \end{aligned}$$

fonction qui reste finie et déterminée pour  $|\cos \psi| < 1$ .

V. — LE PROBLÈME DE L'INTENSITÉ DE LA PESANTEUR NORMALE.

Notons que (39) s'écrit habituellement

$$N = \frac{a_m}{G_m S} \int_S f \Delta g dS, \quad (47)$$

S étant la surface de la sphère de volume égal à celui du géoïde compensé et  $dS$  un élément de cette surface.

$$\Delta g = g - \gamma$$

est l'anomalie de gravité relative à l'élément  $dS$ .  $g$  s'obtiendra par la réduction des observations au géoïde compensé, tandis que  $\gamma$  sera calculée par la formule internationale ou une autre similaire.

Il est évident que pour pouvoir appliquer utilement le théorème de STOKES, on a intérêt à rechercher une expression de  $\gamma$  d'autant plus précise que l'on veut obtenir  $N$  avec la plus petite erreur possible.

Ce problème a été résolu pour la première fois par CLAIRAUT au premier ordre de l'aplatissement. DE GRAAF HUNTER a poussé la précision jusqu'au deuxième ordre de l'aplatissement. Dans ce qui suit nous suivrons l'exposé de cet auteur en lui apportant quelques modifications de détail et nous établirons la formule de la gravité normale au troisième ordre de l'aplatissement.

Le théorème de GREEN a pour expression

$$\iiint_D V \Delta V' d\tau + \iint_S V \frac{dV'}{dn} d\sigma = \iiint_D V' \Delta V d\tau + \iint_S V' \frac{dV}{dn} d\sigma, \quad (48)$$

$V$  et  $V'$  étant des fonctions continues, finies en tout point du domaine d'intégration  $D$  limité par la surface  $S$ , et dérivables au moins deux fois dans ce domaine, les dérivées étant elles-mêmes des fonctions continues. La normale est dirigée positivement vers l'intérieur du domaine.

Désignons par  $V$  le potentiel total d'attraction de la surface de référence en un point extérieur  $M$ . Il se compose, dans le cas de la Terre, de deux parties : 1° le potentiel  $V''$  d'attraction de la matière totale contenue à l'intérieur de la surface; 2° le potentiel  $U$  d'un système conservatif de forces, c'est-à-dire le potentiel de rotation de la Terre.

Nous aurons donc

$$V = V'' + U. \quad (49)$$

Si nous supposons que la Terre est un corps en rotation uniforme, nous pourrons écrire

$$U = \frac{1}{2} \omega^2 r^2 \sin^2 \theta, \quad (50)$$

$r$  étant la distance du centre de la Terre au point potentié  $M$ ,  $\theta$  étant la colatitude de ce dernier et  $\omega$  la vitesse angulaire de la Terre.

Nous poserons

$$v' = \frac{1}{\Delta},$$

$\Delta$  étant la distance d'un point  $M'(r', \theta', \varphi')$  intérieur à la surface de référence, au point  $M(r, \theta, \varphi)$ .

Nous prendrons

$$V = V_c,$$

où  $V_c$  est une constante, car la surface de référence est une surface équipotentielle.

Comme  $\frac{1}{\Delta}$  est une solution de l'équation de LAPLACE, la formule de GREEN deviendra, si l'on tient compte de (49),

$$V_c \iint_S \frac{d}{dn} \left( \frac{1}{\Delta} \right) d\sigma = \iiint_D \frac{1}{\Delta} \Delta V_c'' d\tau + \iint_D \frac{1}{\Delta} \Delta U_c d\tau + \iint_S \frac{1}{\Delta} \frac{dV_c}{dn} d\sigma. \quad (51)$$

Mais, puisque le point potentié est extérieur à la surface de référence, on a, d'après un théorème de GAUSS,

$$\iint_S \frac{d}{dn} \left( \frac{1}{\Delta} \right) d\sigma = 0.$$

D'autre part, le théorème de POISSON donne

$$\Delta V_c'' = -4\pi\tau,$$

$\tau$  étant la densité de matière attractive située à l'intérieur de  $S$ , et nous avons

$$\gamma = \frac{dV_c}{dn},$$

$\gamma$  étant la gravité normale à la surface de référence, en un point de celui-ci.

La relation (51) s'écrira maintenant

$$\iiint_D \frac{\tau d\tau}{\Delta} = \frac{\omega^2}{2\pi} \iiint_D \frac{d\tau}{\Delta} + \frac{1}{4\pi} \iint_S \frac{\gamma d\sigma}{\Delta}. \quad (52)$$

Le premier membre de cette dernière expression n'est autre que le potentiel d'attraction au point  $M$ , de la matière contenue dans le domaine  $D$ , limité par la surface  $S$ , c'est-à-dire précisément  $V''$ . Nous aurons donc finalement, en vertu de (49), (50) et (52),

$$V = \frac{1}{2} \omega^2 r^2 \sin^2 \theta + \frac{\omega^2}{2\pi} \iiint_D \frac{d\tau}{\Delta} + \frac{1}{4\pi} \iint_S \frac{\gamma d\sigma}{\Delta}, \quad (53)$$

$V$  étant le potentiel total dû à l'attraction de la surface de référence en un point  $M$  extérieur.



Il résulte de ce qui précède que le troisième terme de l'équation (53) renferme implicitement le théorème de STOKES, tandis que, comme nous allons le démontrer, les deux premiers termes conduisent à la formule de CLAIRAUT et, d'une manière plus générale, à celle de l'intensité de la pesanteur normale.

Pour faciliter l'exposé, nous écrirons

$$V_c = X + Y + Z$$

et nous calculerons séparément les trois termes du second membre de (53). De plus, nous prendrons le rapport de la force centrifuge équatoriale à la gravité équatoriale sur la surface de référence, et nous poserons

$$m = \frac{\omega^2 a}{G}, \quad (21)$$

quantité qui est de l'ordre de l'aplatissement du sphéroïde. Si la surface de référence était une sphère, on aurait

$$r' = a_m \quad \text{et} \quad \gamma = G_m,$$

c'est-à-dire que la gravité serait constante. La variation que l'observation décèle à la surface de notre globe provient donc — ainsi que l'avaient deviné par une intuition géniale HUYGHENS et NEWTON — de l'aplatissement de la Terre causé par la rotation de celle-ci autour de son axe polaire. Ainsi CLAIRAUT devait conserver au moins les termes du premier ordre de l'aplatissement pour pouvoir rendre compte de la variation de la gravité en fonction de la latitude géographique.

## VI. — FORMULE DE CLAIRAUT.

Nous partirons de l'équation (1) du sphéroïde de révolution

$$r' = a_m \left(1 - \frac{2}{3} \varepsilon X_2\right). \quad (1)$$

Si nous désignons par  $a$  le rayon équatorial du sphéroïde, nous aurons, d'après (1),

$$a = a_m \left[1 - \frac{2}{3} \varepsilon (X_2)_{\theta=\frac{\pi}{2}}\right] = a_m \left[1 + \frac{\varepsilon}{3}\right];$$

d'où pour (1), au deuxième ordre près de  $\varepsilon$ ,

$$r' = a \left(1 - \frac{\varepsilon}{3} - \frac{2}{3} \varepsilon X_2\right).$$

Nous poserons, par analogie avec (1),

$$\gamma = G_m (1 + \alpha X_2),$$

où  $\alpha$  est une quantité du premier ordre en  $\varepsilon$ , et  $G_m$  la gravité moyenne. Si nous désignons par  $G$  la gravité équatoriale rapportée au sphéroïde, nous aurons

$$G = G_m [1 + \alpha (X_2)_{\theta=\frac{\pi}{2}}] = G_m \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right);$$

d'où, au deuxième ordre près,

$$\gamma = G \left(1 + \frac{\alpha}{2} + \alpha X_2\right).$$

CALCUL DE  $X$  :

$$X = \frac{m G}{2 a} r^2 \sin^2 \theta.$$

Exprimons  $\sin^2 \theta$  en fonction des polynomes de LEGENDRE. Nous avons

$$X_2 = \frac{1}{2} (3 \cos^2 \theta - 1); \text{ d'où } \sin^2 \theta = \frac{2}{3} (1 - X_2),$$

et ainsi

$$r^2 = a^2,$$

en négligeant les termes du premier ordre, puisque  $m$  est du premier ordre. Nous obtenons donc, au deuxième ordre près,

$$X = \frac{m G a}{3} (1 - X_2).$$

CALCUL DE  $Y$  :

$$Y = \frac{m G}{2 \pi a} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \iiint_D X_n r'^{n+2} \sin \theta' d\theta' d\varphi' dr'.$$

Si nous supposons que toutes les couches de même densité sont à peu près sphériques, nous pourrions écrire

$$r' = a' \left(1 - \frac{\varepsilon}{3} - \frac{2}{3} \varepsilon X_2\right),$$

$a'$  étant un paramètre variable d'une couche à l'autre, prenant la valeur  $a$  sur le sphéroïde de révolution, et  $X'_2$  un harmonique zonal du deuxième degré en  $\theta'$ . Comme  $m$  est du premier ordre, nous prendrions

$$r' = a' \text{ d'où } r'^{n+2} = a'^{n+2}.$$

D'ailleurs,

$$dr' = da'.$$

Ainsi,

$$Y = \frac{m G}{2 \pi a} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \int_0^a \int_0^\pi \int_0^{2\pi} a'^{n+2} X_n \sin \theta' d\theta' d\varphi' da',$$

ou, en vertu des propriétés des fonctions sphériques,

$$Y = \frac{m G}{2 \pi a} \frac{4 \pi a^3}{3 r'} = \frac{2 m G a}{3}.$$

CALCUL DE Z :

$$Z = \frac{G}{4 \pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r'^{n+1}} \iint_S \left(1 + \frac{\alpha}{2} + \alpha X_2'\right) X_n r'^{n+2} \sin \theta' d\theta' d\varphi'.$$

Mais, d'après (1),

$$r'^{n+2} = a^{n+2} \left[1 - (n+2) \left(\frac{\varepsilon}{3} + \frac{2}{3} \varepsilon X_2'\right)\right];$$

d'où

$$Z = \frac{G a}{4 \pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{r'}\right)^{n+1} \iint_S \left(1 + \frac{\alpha}{2} + \alpha X_2'\right) \left[1 - (n+2) \frac{\varepsilon}{3} - \frac{2}{3} (n+2) \varepsilon X_2'\right] X_n \sin \theta' d\theta' d\varphi',$$

ou, au deuxième ordre près,

$$Z = \frac{G a}{4 \pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{r'}\right)^{n+1} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left[1 + \frac{\alpha}{2} + \alpha X_2' - (n+2) \frac{\varepsilon}{3} - \frac{2}{3} (n+2) \varepsilon X_2'\right] X_n \sin \theta' d\theta' d\varphi'.$$

Les termes du second membre de cette égalité s'annulent pour toutes les valeurs de  $n$  différentes de 0 et 2, tandis que pour  $n=0$  et  $n=2$ , ils valent

$$Z = G a \left[ \frac{a}{r'} \left(1 + \frac{\alpha}{2} - \frac{2}{3} \varepsilon\right) + \frac{1}{5} \left(\frac{a}{r'}\right)^3 \left(\alpha - \frac{8}{3} \varepsilon\right) X_2 \right].$$

Mais nous avons, en négligeant les termes des premier et deuxième ordres,

$$\frac{1}{r'} = \frac{1}{a} \left(1 + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{2}{3} \varepsilon X_2\right) \quad \frac{1}{r^3} = \frac{1}{a^3} \quad \frac{1}{r'^{n+1}} = \frac{1}{a^{n+1}};$$

d'où, au deuxième ordre près,

$$Z = G a \left[1 - \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{5} \left(\alpha + \frac{2}{3} \varepsilon\right) X_2\right].$$

Écrivons maintenant

$$X + Y + Z = C,$$

ou

$$\frac{m G a}{3} (1 - X_2) + \frac{2 m G a}{3} + G a \left[1 - \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{5} \left(\alpha + \frac{2}{3} \varepsilon\right) X_2\right] = C.$$

Égalons à zéro les harmoniques de même ordre; nous aurons

$$\begin{aligned} G a \left(1 + m - \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\alpha}{2}\right) &= C \\ -\frac{m}{3} G a + \frac{G a}{5} \left(\alpha + \frac{2}{3} \varepsilon\right) &= 0. \end{aligned}$$

De cette dernière équation nous tirons

$$\alpha = \frac{5}{3} m - \frac{2}{3} \varepsilon,$$

quantité qui est bien du premier ordre. Nous en concluons la relation générale

$$\gamma = G \left[ 1 + \left( \frac{5}{2} m - \varepsilon \right) \cos^2 \theta \right],$$

ou encore, en fonction de la latitude,  $\psi = \frac{\pi}{2} - \theta$ ,

$$\gamma = G \left[ 1 + \left( \frac{5}{2} m - \varepsilon \right) \sin^2 \psi \right],$$

formule due à CLAIRAUT [1]. Si nous l'exprimons en fonction de  $G_m$ , nous aurons

$$\gamma = G_m \left[ 1 + \left( \frac{5}{2} m - \varepsilon \right) \cos^2 \theta \right] \left( 1 - \frac{\alpha}{2} \right) = G_m \left[ 1 - \frac{1}{3} \left( \frac{5}{2} m - \varepsilon \right) + \left( \frac{5}{2} m - \varepsilon \right) \cos^2 \theta \right].$$

Finalement,

$$\gamma = G_m \left[ 1 - \left( \frac{5}{2} m - \varepsilon \right) \left( \frac{1}{3} - \cos^2 \theta \right) \right],$$

formule établie par STOKES en 1849 [2].

#### VII. — FORMULE DE L'INTENSITÉ DE LA PESANTEUR NORMALE AU TROISIÈME ORDRE PRÈS.

L'équation de l'ellipsoïde de révolution à deux axes inégaux s'écrit, si l'on conserve les termes de l'ordre de grandeur du carré de l'aplatissement, conformément à (2),

$$r = a \left[ 1 - \frac{2}{3} \varepsilon \left( 1 + \frac{23}{42} \varepsilon \right) X_2 + \frac{12}{35} \varepsilon^2 X_4 \right]. \quad (2)$$

Par analogie nous poserons, pour l'intensité de la pesanteur normale à cet ellipsoïde,

$$\gamma = G_m [1 + \alpha X_2 + \beta X_4]. \quad (57)$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  sont des coefficients inconnus respectivement du premier et du second ordre de grandeur.

Pour faciliter l'élaboration des calculs, nous poserons encore

$$x_2 = -\frac{23}{63} \varepsilon^2 X_2 \quad x_4 = \frac{12}{35} \varepsilon^2 X_4 \quad (58)$$

et nous remplacerons l'équation (2) par la suivante, qui lui est équivalente :

$$r = a_m \left[ 1 - \frac{2}{3} \varepsilon X_2 + \sum_{n=1}^{n=2} x_{2n} \right]. \quad (59)$$

Sous les conditions exprimées par (58),  $x_{2n}$  est un harmonique zonal d'ordre  $2n$  et de l'ordre de grandeur de  $\varepsilon^2$ .

Si nous désignons encore par  $a$  le rayon équatorial de l'ellipsoïde, nous aurons

$$a = a_m \left[ 1 + \frac{\varepsilon}{3} + \sum_{n=1}^{n=2} (x_{2n})_{\theta=\frac{\pi}{2}} \right].$$

Pour abrégé, nous remplacerons dorénavant  $(x_{2n})_{\theta=\frac{\pi}{2}}$  par  $x_{2n}^0$ .

Par conséquent, au troisième ordre près,

$$r = a \left[ 1 - \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon^2}{9} - \sum_{n=1}^{n=2} x_{2n}^0 - \frac{2}{3} \varepsilon X_2 + \frac{2}{9} \varepsilon^2 X_2 + \sum_{n=1}^{n=2} x_{2n} \right].$$

De même,  $G$  étant la gravité équatoriale sur l'ellipsoïde, on a

$$G = G_m \left[ 1 - \frac{\alpha}{2} + \frac{3}{8} \beta \right];$$

d'où, au troisième ordre près,

$$\gamma = G \left[ 1 + \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha^2}{4} - \frac{3}{8} \beta + \alpha \left( 1 + \frac{\alpha}{2} \right) X_2 + \beta X_4 \right].$$

CALCUL DE  $X$  :

$$X = \frac{m G}{3 a} (1 - X_2) r^2.$$

Or,

$$r^2 = a^2 \left( 1 - \frac{2}{3} \varepsilon - \frac{4}{3} \varepsilon X_2 \right),$$

en négligeant les termes du second ordre de grandeur, puisque  $m$  est du premier.

Il vient donc, au troisième ordre près,

$$X = \frac{m G a}{3} \left( 1 - \frac{2}{3} \varepsilon - \frac{2}{3} \varepsilon X_2 - X_2 + \frac{4}{3} \varepsilon X_2^2 \right).$$

Exprimons maintenant  $X_2^2$  en fonction des polynômes de LEGENDRE. Nous avons

$$X_2^2 = \frac{1}{4} (9 \cos^2 \theta - 6 \cos^2 \theta + 1).$$

Or,

$$X_4 = \frac{1}{8} (35 \cos^4 \theta - 30 \cos^2 \theta + 3);$$

d'où l'on tire

$$\cos^4 \theta = \frac{8}{35} X_4 + \frac{6}{7} \cos^2 \theta - \frac{3}{35}.$$

Portant cette valeur dans l'expression de  $X_2^2$ , nous obtiendrons

$$X_2^2 = \frac{1}{4} \left( \frac{72}{35} X_4 + \frac{12}{7} \cos^2 \theta + \frac{8}{35} \right).$$

Comme

$$\cos^2 \theta = \frac{2}{3} X_2 + \frac{1}{3},$$

nous aurons encore

$$X_2^2 = \frac{18}{35} X_4 + \frac{2}{7} X_2 + \frac{1}{5}.$$

Si nous remplaçons  $X_2^2$  par la valeur précédente dans l'expression de  $X$ , nous pourrions écrire finalement, au troisième ordre près,

$$X = \frac{m G a}{3} \left[ 1 - \frac{2}{5} \varepsilon - \left( 1 + \frac{2}{7} \varepsilon \right) X_2 + \frac{24}{35} \varepsilon X_4 \right].$$

CALCUL DE Y :

$$Y = \frac{m G}{2 \pi a} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \iiint_D X_n r'^{n+2} \sin \theta' d\theta' d\varphi' dr'.$$

Si nous supposons que toutes les couches de même densité sont ellipsoïdales, nous pouvons écrire

$$r' = a' \left[ 1 - \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon^2}{9} - \sum_{n=1}^{n=2} \alpha_{2n}^0 - \frac{2}{3} \varepsilon X_2 + \frac{2}{9} \varepsilon^2 X_2 + \sum_{n=1}^{n=2} \alpha_{2n} \right],$$

$a'$  étant un paramètre variable d'une couche à l'autre, prenant la valeur  $a$  sur l'ellipsoïde de révolution.

Comme  $m$  est du premier ordre, nous prendrons

$$r' = a' \left[ 1 - \frac{\varepsilon}{3} - \frac{2}{3} \varepsilon X_2 \right];$$

d'où, au même ordre,

$$r'^{n+2} = a'^{n+2} \left[ 1 - (n+2) \left( \frac{\varepsilon}{3} + \frac{2}{3} \varepsilon X_2' \right) \right].$$

D'ailleurs,

$$dr' = \frac{\partial r'}{\partial a'} da' = \left[ 1 - \frac{\varepsilon}{3} - \frac{2}{3} \varepsilon X_2' \right] da'.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} Y &= \frac{m G}{2\pi a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \iiint_D \left[ 1 - \frac{\varepsilon}{3} - \frac{2}{3} \varepsilon X_2 \right] \left[ 1 - (n+2) \left( \frac{\varepsilon}{3} + \frac{2}{3} \varepsilon X_2 \right) \right] a'^{n+2} X_n \sin \theta' d\theta' d\varphi' da' \\ &= \frac{m G}{2\pi a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+3}{r^{n+1}} \int_0^a \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left[ \frac{1}{n+3} - \frac{\varepsilon}{3} - \frac{2}{3} \varepsilon X_2 \right] a'^{n+2} X_n \sin \theta' d\theta' d\varphi' da', \end{aligned}$$

ou encore, en intégrant,

$$Y = \frac{2 m G a}{3} \left[ (1 - \varepsilon) \frac{a}{r} - \frac{2}{3} \varepsilon X_2 \left( \frac{a}{r} \right)^2 \right].$$

Or, nous avons, aux termes respectivement des second et premier ordres près,

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{a} \left[ 1 + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{2}{3} \varepsilon X_2 \right] \quad \frac{1}{r^3} = \frac{1}{a^3}.$$

D'où

$$Y = \frac{2 m G a}{3} \left[ (1 - \varepsilon) \left( 1 + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{2}{3} \varepsilon X_2 \right) - \frac{2}{3} \varepsilon X_2 \right],$$

c'est-à-dire finalement, au troisième ordre près,

$$Y = \frac{2 m G a}{3} \left( 1 - \frac{2}{3} \varepsilon + \frac{4}{15} \varepsilon X_2 \right).^{(1)}$$

---

(1) Nous pouvons aussi exprimer Y en fonction du rayon moyen  $a_w$  et de la gravité moyenne  $G_m$ . Posons, en effet,

$$m' = \frac{\omega^2 a_m}{G_m}.$$

Nous aurons alors

$$\omega^2 = \frac{m' G_m}{a_m} = \frac{m G}{a}$$

et

$$m G a = m' G_m \frac{a^2}{a_m}.$$

Or,

$$a^2 = a_m^2 \left( 1 + \frac{2}{3} \varepsilon \right)$$

au second ordre près. Par conséquent, il vient au troisième ordre près,

$$Y = \frac{2 m' G_m a_m}{3} \left( 1 + \frac{4}{15} \varepsilon X_2 \right),$$

formule conforme à celle renseignée par M. de Graaf Hunter (p. 285, *op. cit.*) et dont il ne donne pas de démonstration. Il attribue celle-ci à Routh, mais nous n'avons pu la trouver. Nous nous permettons de signaler, en passant, qu'il est inutile de faire intervenir dans les présents calculs les valeurs moyennes, comme l'a fait M. de Graaf Hunter qui avait en vue le théorème de Stokes.

CALCUL DE Z :

$$Z = \frac{G}{4\pi} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \iint_s [1 + \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha^2}{4} - \frac{3}{8}\beta + \alpha X'_2 + \frac{\alpha^2}{2} X'_2 + \beta X'_4] X_n r'^n d\sigma.$$

Or, sur l'ellipsoïde, nous avons

$$d\sigma = r'^2 \sec \eta \sin \theta' d\theta' d\varphi',$$

$\eta$  étant l'inclinaison de la normale sur le rayon vecteur <sup>(1)</sup>.

D'ailleurs,

$$\operatorname{tg} \eta = \frac{1}{r'} \frac{dr'}{d\theta'} = \varepsilon \sin 2\theta';$$

d'où, au troisième ordre près,

$$\sec \eta = 1 + \frac{\varepsilon^2}{2} \sin^2 2\theta' = 1 + \frac{4}{15} \varepsilon^2 + \frac{4}{21} \varepsilon^2 X'_2 - \frac{16}{35} \varepsilon^2 X'_4. \quad (2)$$

D'autre part,

$$r' = a \left[ 1 - \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon^2}{9} - \sum_{n=1}^{n=2} x_{2n}^0 - \frac{2}{3} \varepsilon X'_2 + \frac{2}{9} \varepsilon^2 X'_2 + \sum_{i=1}^{i=2} x'_{2i} \right] \quad (3);$$

d'où, en négligeant les termes d'ordres supérieurs au second,

$$r'^{n+2} = a^{n+2} \left\{ 1 + (n+2) \left( -\frac{\varepsilon}{3} + \frac{n+3}{18} \varepsilon^2 - \sum_{i=1}^{i=2} x'_{2i} \right) - \frac{2}{3} \varepsilon (n+2) \left[ 1 - \frac{\varepsilon}{3} (n+2) \right] X'_2 + \frac{2}{9} (n+2)(n+1) \varepsilon^2 X'^2_2 + (n+2) \sum_{i=1}^{i=2} x'_{2i} \right\}.$$

(1) L'influence de cet angle était négligeable dans les cas précédents.

(2) En effet,

$$\sin^2 2\theta' = 4 (\cos^2 \theta' - \cos^4 \theta').$$

Or,

$$\cos^4 \theta' = \frac{8}{35} X'_4 + \frac{6}{7} \cos^2 \theta' - \frac{3}{35};$$

d'où

$$\sin^2 2\theta' = 4 \left( \frac{1}{7} \cos^2 \theta' - \frac{8}{35} X'_4 + \frac{3}{35} \right).$$

Comme

$$\cos^2 \theta' = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} X'_2,$$

il vient enfin

$$\sin^2 2\theta' = \frac{8}{15} + \frac{8}{21} X'_2 - \frac{32}{35} X'_4.$$

(3)  $a$  et non  $a'$ , car les points potentiels sont situés sur l'ellipsoïde.



Il vient ainsi, au terme du troisième ordre près, après avoir exprimé  $X_2^2$  en fonction de  $X_2'$  et  $X_4'$ ,

$$\begin{aligned} Z = & \frac{G}{4\pi} \sum_{n=0}^{n=\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left\{ 1 + \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha^2}{4} - \frac{3}{8}\beta + \alpha X_2' + \frac{\alpha^2}{2} X_2'^2 + \beta X_4' \right. \\ & - (n+2) \frac{\varepsilon}{3} \left[ 1 + \frac{\alpha}{2} - (n+3) \frac{\varepsilon}{6} \right] - (n+2) \sum_{i=1}^{i=2} x_{2i}' - \frac{2}{3} \varepsilon (n+2) \left[ 1 + \alpha - (n+2) \frac{\varepsilon}{3} \right] X_2' \\ & \left. + \frac{2}{3} \varepsilon (n+2) \left[ (n+1) \frac{\varepsilon}{3} - \alpha \right] \left( \frac{18}{35} X_4' + \frac{2}{7} X_2' + \frac{1}{5} \right) + (n+2) \sum_{i=1}^{i=2} x_{2i}' + \frac{4}{15} \varepsilon^2 + \frac{4}{21} \varepsilon^2 X_2' - \frac{16}{35} \varepsilon^2 X_4' \right\} \\ & X_n \sin \theta' d\theta' d\varphi', \end{aligned}$$

c'est-à-dire encore

$$\begin{aligned} Z = & G a \left[ \frac{a}{r} \left( 1 + \frac{\alpha}{2} - \frac{2}{3} \varepsilon + \frac{\alpha^2}{4} - \frac{3}{8} \beta - \frac{3}{5} \alpha \varepsilon + \frac{31}{45} \varepsilon^2 - 2 \sum_{n=1}^{n=2} x_{2n}'^0 \right) \right. \\ & + \left( \frac{a}{r} \right)^3 \left( \frac{\alpha}{5} + \frac{\alpha^2}{10} - \frac{8}{15} \varepsilon - \frac{24}{35} \alpha \varepsilon + \frac{284}{315} \varepsilon^2 \right) X_2 + \left( \frac{a}{r} \right)^5 \left( \frac{\beta}{9} + \frac{104}{315} \varepsilon^2 - \frac{8}{35} \alpha \varepsilon \right) X_4 \\ & \left. + \sum_{n=1}^{n=2} \left( \frac{a}{r} \right)^{2n+1} \frac{2n+2}{4n+1} x_{2n}'^0 \right]. \end{aligned}$$

Or, nous avons, en négligeant les termes respectivement des troisième, deuxième et premier ordres,

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} &= \frac{1}{a} \left[ 1 + \frac{\varepsilon}{3} + \sum_{n=1}^{n=2} x_{2n}'^0 + \frac{2}{3} \varepsilon X_2 + \frac{2}{9} \varepsilon^2 X_2 + \frac{4}{9} \varepsilon^2 X_2^2 - \sum_{n=1}^{n=2} x_{2n}'^0 \right] \\ \frac{1}{r^3} &= \frac{1}{a^3} [1 + \varepsilon + 2\varepsilon X_2] \quad \frac{1}{r^5} = \frac{1}{a^5} \quad \frac{1}{r^{2n+1}} = \frac{1}{a^{2n+1}} \quad (n = 1, 2). \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} Z = & G a \left[ 1 + \frac{\varepsilon}{3} + \sum_{n=1}^{n=2} x_{2n}'^0 + \frac{2}{3} \varepsilon X_2 + \frac{2}{9} \varepsilon^2 X_2 + \frac{4}{9} \varepsilon^2 X_2^2 - \sum_{n=1}^{n=2} x_{2n}'^0 \right. \\ & + \left( \frac{\alpha}{2} - \frac{2}{3} \varepsilon \right) \left( 1 + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{2}{3} \varepsilon X_2 \right) + \frac{\alpha^2}{4} - \frac{3}{8} \beta - \frac{3}{5} \alpha \varepsilon + \frac{31}{45} \varepsilon^2 - 2 \sum_{n=1}^{n=2} x_{2n}'^0 \\ & + \left( \frac{\alpha}{5} - \frac{8}{15} \varepsilon \right) \left( 1 + \varepsilon + 2\varepsilon X_2 \right) X_2 + \left( \frac{\alpha^2}{10} - \frac{24}{35} \alpha \varepsilon + \frac{284}{315} \varepsilon^2 \right) X_2 + \left( \frac{\beta}{9} + \frac{104}{315} \varepsilon^2 - \frac{8}{35} \alpha \varepsilon \right) X_4 \\ & \left. + \sum_{n=1}^{n=2} \frac{2n+2}{4n+1} x_{2n}'^0 \right]. \end{aligned}$$

Si nous explicitons ensuite  $X_2^2$  et si nous groupons les termes, nous obtenons finalement, au troisième ordre près,

$$\begin{aligned} Z = & G a \left[ 1 - \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\alpha}{2} + \frac{77}{225} \varepsilon^2 + \frac{\alpha^2}{4} - \frac{3}{8} \beta - \frac{53}{150} \alpha \varepsilon - \sum_{n=1}^{n=2} x_{2n}'^0 + \left( \frac{\alpha}{5} + \frac{2}{15} \varepsilon - \frac{2}{63} \varepsilon^2 \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\alpha^2}{10} - \frac{4}{105} \alpha \varepsilon \right) X_2 + \left( \frac{\beta}{9} + \frac{16}{21 \times 75} \varepsilon^2 - \frac{4}{5 \times 35} \alpha \varepsilon \right) X_4 - \sum_{n=1}^{n=2} \frac{2n-1}{4n+1} x_{2n}'^0 \right]. \end{aligned}$$

Écrivons maintenant

$$X + Y + Z = C,$$

ou

$$\begin{aligned} & \frac{m G a}{3} \left[ 1 - \frac{2}{5} \varepsilon - \left( 1 + \frac{2}{7} \varepsilon \right) X_2 + \frac{24}{35} \varepsilon X_4 \right] + \frac{2 m G' a'}{3} \left[ 1 - \frac{2}{3} \varepsilon + \frac{4}{15} \varepsilon X_2 \right] \\ & + G a \left[ 1 - \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\alpha}{2} + \frac{77}{225} \varepsilon^2 + \frac{\alpha^2}{4} - \frac{3}{8} \beta - \frac{53}{150} \alpha \varepsilon - \sum_{n=1}^{n=2} x_{2n}^0 + \left( \frac{\alpha}{5} + \frac{2}{15} \varepsilon - \frac{2}{63} \varepsilon^2 \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\alpha^2}{10} - \frac{4}{105} \alpha \varepsilon \right) X_2 + \left( \frac{\beta}{9} + \frac{16}{21 \times 75} \varepsilon^2 - \frac{4 \alpha \varepsilon}{5 \times 35} \right) X_4 - \sum_{n=1}^{n=0} \frac{2n-1}{4n+1} x_{2n} \right] = C, \end{aligned} \quad (58)$$

et égalons à zéro les harmoniques zonaux de même ordre, en tenant compte de (58) <sup>(1)</sup>. Il viendra

$$\begin{aligned} & \frac{m G a}{3} \left( 1 - \frac{2}{5} \varepsilon \right) + \frac{2 m G' a'}{3} \left( 1 - \frac{2}{3} \varepsilon \right) + G a \left[ 1 - \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\alpha}{2} + \frac{77}{225} \varepsilon^2 + \frac{\alpha^2}{4} - \frac{3}{8} \beta - \frac{53}{150} \alpha \varepsilon \right. \\ & \left. - \sum_{n=1}^{n=2} x_{2n}^0 \right] = C; \\ & \frac{m G a}{3} \left( -1 - \frac{2}{7} \varepsilon \right) + \frac{8}{45} m \varepsilon G a + G a \left( \frac{\alpha}{5} + \frac{2}{15} \varepsilon - \frac{2}{63} \varepsilon^2 + \frac{\alpha^2}{10} - \frac{4}{105} \alpha \varepsilon + \frac{23}{5 \times 63} \varepsilon^2 \right) = 0; \\ & \frac{8}{35} m \varepsilon G a + G a \left( \frac{\beta}{9} + \frac{16}{21 \times 75} \varepsilon^2 - \frac{4}{5 \times 35} \alpha \varepsilon - \frac{4}{35} \varepsilon^2 \right) = 0. \end{aligned}$$

Les deux dernières équations peuvent encore s'écrire

$$\begin{aligned} & \frac{\alpha}{5} - \frac{m}{3} + \frac{2}{15} \varepsilon + \frac{26}{15 \times 21} m \varepsilon + \frac{13}{5 \times 63} \varepsilon^2 + \frac{\alpha^2}{10} - \frac{4}{105} \alpha \varepsilon = 0, \\ & \frac{\beta}{9} + \frac{8}{35} m \varepsilon - \frac{4 \times 41}{35 \times 45} \varepsilon^2 - \frac{4}{5 \times 35} \alpha \varepsilon = 0. \end{aligned}$$

La première résolue par rapport à  $\alpha$  donne, en prenant le signe + pour la racine, puisque  $\alpha$  est du premier ordre,

$$\alpha = \frac{5}{3} m - \frac{2}{3} \varepsilon + \frac{64}{63} m \varepsilon - \frac{5}{9} \varepsilon^2 - \frac{25}{18} m^2.$$

Si nous portons cette valeur dans la troisième, nous aurons

$$\beta = \frac{4}{5} \varepsilon^2 - \frac{12}{7} m \varepsilon,$$

quantité qui est bien du second ordre.

---

<sup>(1)</sup> Voir Annexe 4.

Nous en concluons l'expression de la gravité normale rapportée à l'ellipsoïde de révolution représenté par l'équation (2) :

$$\gamma = G \left[ 1 + \left( \frac{5}{3} m - \frac{2}{3} \varepsilon - \frac{2}{21} m \varepsilon - \frac{1}{3} \varepsilon^2 \right) \left( \frac{1}{2} + X_2 \right) + \left( \frac{4}{5} \varepsilon^2 - \frac{12}{7} m \varepsilon \right) \left( -\frac{3}{8} + X_4 \right) \right]$$

ou

$$\gamma = G \left[ 1 + \left( \frac{5}{2} m - \varepsilon + \frac{44}{7} m \varepsilon - \frac{7}{2} \varepsilon^2 \right) \cos^2 \theta + \left( \frac{7}{2} \varepsilon^2 - \frac{15}{2} m \varepsilon \right) \cos^4 \theta \right].$$

Cette relation peut encore s'écrire en fonction de la latitude :

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \theta + \varepsilon \sin 2 \varphi \quad (1);$$

$$\gamma = G \left[ 1 + \left( \frac{5}{2} m - \varepsilon - \frac{17}{14} m \varepsilon \right) \sin^2 \varphi + \frac{1}{8} (\varepsilon^2 - 5 \varepsilon m) \sin^2 2 \varphi \right], \quad (60)$$

formule qui est celle due à M. J. DE GRAAF HUNTER [6, p. 399]. Si nous y substituons les valeurs numériques de  $G$ ,  $a$  et  $\varepsilon$  adoptées respectivement par l'Union internationale de Géodésie et de Géophysique à Stockholm en 1930 et à Madrid en 1925 (pour  $a$  et  $\varepsilon$ ) (2), nous obtiendrons la formule

$$\gamma = 978,049 (1 + 0,005\,288\,322 \sin^2 \varphi - 0,000\,005\,88 \sin^2 2 \varphi), \quad (61)$$

que nous pouvons comparer avantageusement avec la formule internationale de Stockholm [10] :

$$\gamma = 978,049 (1 + 0,005\,288\,4 \sin^2 \varphi - 0,000\,005\,9 \sin^2 2 \varphi). \quad (62)$$

### VIII. — FORMULE DE L'INTENSITÉ DE LA PESANTEUR NORMALE AU QUATRIÈME ORDRE PRÈS.

Nous choisirons comme domaine D, l'ellipsoïde de révolution d'aplatissement  $\varepsilon$ , représenté par l'équation (7) page 12 :

$$r = a_m \left[ 1 - \frac{2}{3} \varepsilon \left( 1 + \frac{23}{42} \varepsilon + \frac{14}{45} \varepsilon^2 \right) X_2 + 4 \varepsilon^2 \left( \frac{3}{35} + \frac{\varepsilon}{11} \right) X_4 - \frac{40}{281} \varepsilon^3 X_6 \right]. \quad (7)$$

(1) Les formules de transformation utilisées sont (voir Annexe 5) :

$$\begin{aligned} \cos^2 \theta &= \sin^2 \varphi - \varepsilon \sin^2 2 \varphi, \\ \cos^4 \theta &= \sin^2 \varphi - \frac{1}{4} \sin^2 2 \varphi. \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} G_m &= 978,049 \text{ gals} & a &= 6378,388.10^7 \text{ cm} \\ \varepsilon &= 0,0033670 & m &= 0,0034678 \text{ (op. cit. p. 399).} \end{aligned}$$

Par analogie, nous poserons

$$\gamma = G_m [1 + \alpha X_2 + \beta X_4 + \delta X_6],$$

où  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\delta$  sont des coefficients inconnus respectivement des premier, deuxième et troisième ordres de grandeur.

Pour plus de facilité, au lieu de l'équation (7) nous utiliserons

$$r = a_m \left[ 1 - \frac{2}{3} \varepsilon \left( 1 + \frac{23}{42} \varepsilon \right) X_2 + \frac{12}{35} \varepsilon^2 X_4 + \sum_{n=1}^{n=3} x_{2n} \right],$$

où

$$x_2 = -\frac{28}{135} \varepsilon^3 X_2, \quad x_4 = \frac{4}{11} \varepsilon^3 X_4, \quad x_6 = -\frac{40}{231} \varepsilon^3 X_6. \quad (63)$$

$x_{2n}$  est un harmonique *zonal* d'ordre  $2n$  et de l'ordre de grandeur de  $\varepsilon^3$ .

Nous en tirons, comme précédemment,

$$a = a_m \left[ 1 + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{14}{45} \varepsilon^2 + \sum_{n=1}^{n=3} x_{2n}^0 \right];$$

d'où, au quatrième ordre près,

$$r = a \left[ 1 - \frac{\varepsilon}{3} - \frac{\varepsilon^2}{5} + \frac{23}{135} \varepsilon^3 - \sum_{n=1}^{n=3} x_{2n}^0 + \left( -\frac{2}{3} \varepsilon - \frac{\varepsilon^2}{7} + \frac{241}{27 \times 35} \varepsilon^3 \right) X_2 + \frac{4}{35} (3 \varepsilon^2 - \varepsilon^3) X_4 + \sum_{n=1}^{n=3} x_{2n} \right].$$

De même, si  $G$  désigne encore la gravité équatoriale sur l'ellipsoïde, nous aurons

$$G = G_m \left[ 1 - \frac{\alpha}{2} + \frac{3}{8} \beta - \frac{5}{16} \delta \right];$$

d'où, au quatrième ordre près,

$$\gamma = G \left[ 1 + \frac{\alpha}{2} - \frac{3}{8} \beta + \frac{5}{16} \delta + \frac{\alpha^2}{4} - \frac{3}{8} \alpha \beta + \frac{\alpha^3}{8} + \alpha \left( 1 + \frac{\alpha}{2} - \frac{3}{8} \beta + \frac{\alpha^2}{4} \right) X_2 + \beta \left( 1 + \frac{\alpha}{2} \right) X_4 + \delta X_6 \right].$$

CALCUL DE  $X$  :

$$X = \frac{m G}{3 a} (1 - X_2) r^2.$$

Or,

$$r^2 = a^2 \left[ 1 - \frac{2}{3} \varepsilon - \frac{13}{45} \varepsilon^2 - \frac{4}{3} \varepsilon X_2 + \frac{10}{63} \varepsilon^2 X_2 + \frac{24}{35} \varepsilon^2 X_4 + \frac{4}{3} \varepsilon^2 X_6^2 \right]$$

en négligeant les termes du troisième ordre.

D'où

$$X = \frac{mG}{3} a (1 - X_2) \left[ 1 - \frac{2}{3} \varepsilon - \frac{13}{45} \varepsilon^2 - \frac{4}{3} \varepsilon X_2 + \frac{10}{63} \varepsilon^2 X_2 + \frac{24}{35} \varepsilon^2 X_4 + \frac{4}{3} \varepsilon^2 X_2^2 \right].$$

Si nous tenons compte des égalités (cf. Annexe 6)

$$\begin{aligned} X_2 X_4 &= \frac{5}{11} X_6 + \frac{20}{77} X_4 + \frac{2}{7} X_2, \\ X_2^3 &= \frac{18}{77} X_6 + \frac{108}{385} X_4 + \frac{3}{7} X_2 + \frac{2}{35}, \end{aligned}$$

nous aurons finalement, au quatrième ordre près,

$$X = \frac{mG}{3} a \left[ 1 - \frac{2}{5} \varepsilon - \frac{9}{35} \varepsilon^2 + \left( -1 - \frac{2}{7} \varepsilon + \frac{4}{7} \varepsilon^2 \right) X_2 + \frac{12}{35} \left( 2 \varepsilon + \frac{17}{11} \varepsilon^2 \right) X_4 - \frac{32}{77} \varepsilon^2 X_6 \right].$$

CALCUL DE Y :

$$Y = \frac{mG}{2\pi a} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \iiint_D X_n r^{2n} d\sigma dr'.$$

Mais

$$d\sigma = r'^2 \sec \tau_1 \sin \theta' d\theta' d\varphi',$$

où

$$\sec \tau_1 = 1 + \frac{4}{15} \varepsilon^2 + \frac{4}{21} \varepsilon^2 X_2' - \frac{16}{35} \varepsilon^2 X_4'.$$

Si nous supposons encore que toutes les couches de même densité sont ellipsoïdales, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} r' &= a' \left[ 1 - \frac{\varepsilon}{3} - \frac{\varepsilon^2}{5} + \frac{23}{135} \varepsilon^3 - \sum_{n=1}^{n=3} x'_{2n} + \left( -\frac{2}{3} \varepsilon - \frac{\varepsilon^2}{7} + \frac{241}{27 \times 35} \varepsilon^3 \right) X_2' \right. \\ &\quad \left. + \frac{4}{35} (3 \varepsilon^2 - \varepsilon^3) X_4' + \sum_{n=1}^{n=3} x'_{2n} \right], \end{aligned}$$

$a'$  étant un paramètre variable d'une couche à l'autre, prenant la valeur  $a$  sur l'ellipsoïde de révolution et  $x'_{2n}$  dépendant de  $\theta'$ .

Comme  $m$  est du premier ordre, nous prendrons

$$r' = a' \left[ 1 - \frac{\varepsilon}{3} - \frac{\varepsilon^2}{5} - \frac{2}{3} \varepsilon X_2' - \frac{\varepsilon^2}{7} X_2' + \frac{12}{35} \varepsilon^2 X_4' \right];$$

d'où, avec la même précision,

$$\begin{aligned} r'^{n+2} &= a'^{n+2} \left[ 1 - (n+2) \left( \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon^2}{5} + \frac{2}{3} \varepsilon X_2' + \frac{\varepsilon^2}{7} X_2' - \frac{12}{35} \varepsilon^2 X_4' \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} (n+2)(n+1) \left( \frac{\varepsilon^2}{9} + \frac{4}{9} \varepsilon^2 X_2' + \frac{4}{9} \varepsilon^2 X_2'^2 \right) \right]. \end{aligned}$$

D'ailleurs,

$$d\rho' = \left[1 - \frac{\varepsilon}{3} - \frac{\varepsilon^2}{5} - \frac{2}{3}\varepsilon X_2' - \frac{\varepsilon^2}{7} X_2'' + \frac{12}{35}\varepsilon^2 X_4'\right] d a'.$$

Il vient alors, après avoir explicité  $X_2''$ ,

$$\begin{aligned} Y &= \frac{m G}{2 \pi a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+3}{r^{n+1}} \int_0^{a'} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{1}{n+3} - \frac{\varepsilon}{3} - \frac{\varepsilon^2}{5} - \frac{2}{3}\varepsilon X_2' - \frac{\varepsilon^2}{7} X_2'' + \frac{12}{35}\varepsilon^2 X_4' \right. \\ &\quad + \frac{1}{2}(n+2) \left[ \frac{\varepsilon^2}{9} + \frac{2}{9}\varepsilon^2 X_2' + \frac{2}{9}\varepsilon^2 \left( \frac{18}{35} X_4' + \frac{2}{7} X_2'' + \frac{1}{5} \right) \right] + \frac{1}{n+3} \left( \frac{4}{15}\varepsilon^2 + \frac{4}{21}\varepsilon^2 X_2'' \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{16}{35}\varepsilon^2 X_4' \right) \right\} a'^{n+2} X_n \sin \theta' d\theta d\varphi' d a' \\ &= \frac{2 m G a}{3} \left[ \frac{a}{r'} \left( 1 - \varepsilon + \frac{4}{15}\varepsilon^2 \right) + \left( \frac{a}{r'} \right)^3 \left( -2\varepsilon + \frac{109}{35}\varepsilon^2 \right) \frac{X_2}{5} + \left( \frac{a}{r'} \right)^5 \frac{4 \times 59}{21 \times 35} \varepsilon^2 X_4 \right]. \end{aligned}$$

Or, nous avons respectivement, aux troisième, deuxième et premier ordres près,

$$\begin{aligned} \frac{1}{r'} &= \frac{1}{a} \left[ 1 + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{14}{45}\varepsilon^2 + \frac{2}{3}\varepsilon X_2 + \frac{37}{63}\varepsilon^2 X_2 - \frac{12}{35}\varepsilon^2 X_4 + \frac{4}{9}\varepsilon^2 X_2'' \right], \\ \frac{1}{r'^3} &= \frac{1}{a^3} [1 + \varepsilon + 2\varepsilon X_2] \quad \frac{1}{r'^5} = \frac{1}{a^5}. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} Y &= \frac{2 m G a}{3} \left[ 1 + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{14}{45}\varepsilon^2 + \frac{2}{3}\varepsilon X_2 + \frac{37}{63}\varepsilon^2 X_2 - \frac{12}{35}\varepsilon^2 X_4 + \frac{4}{9}\varepsilon^2 X_2'' - \varepsilon \left( 1 + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{2}{3}\varepsilon X_2 \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{4}{15}\varepsilon^2 - \frac{2}{5}\varepsilon \left( 1 + \varepsilon + 2\varepsilon X_2 \right) X_2 + \frac{109}{5 \times 35}\varepsilon^2 X_2 + \frac{4 \times 59}{21 \times 35}\varepsilon^2 X_4 \right]. \end{aligned}$$

Nous pouvons donc écrire finalement, au quatrième ordre près,

$$Y = \frac{2 m G a}{3} \left[ 1 - \frac{2}{3}\varepsilon + \frac{13}{75}\varepsilon^2 + \frac{2}{15} \left( 2\varepsilon + \frac{11}{35}\varepsilon^2 \right) X_2 - \frac{16 \times 47}{35 \times 105} \varepsilon^2 X_4 \right].$$

CALCUL DE Z :

$$\begin{aligned} Z &= \frac{G}{4 \pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \left[ 1 + \frac{\alpha}{2} - \frac{3}{8}\beta + \frac{\alpha^2}{4} + \frac{5}{16}\delta - \frac{3}{8}\alpha\beta + \frac{\alpha^3}{8} + \alpha \left( 1 + \frac{\alpha}{2} - \frac{3}{8}\beta + \frac{\alpha^2}{4} \right) X_2' \right. \\ &\quad \left. + \beta \left( 1 + \frac{\alpha}{2} \right) X_4 + \delta X_6 \right] X_n r'^{n+2} \sec \eta \sin \theta' d\theta' d\varphi'. \end{aligned}$$

Comme

$$\begin{aligned} r' &= a \left[ 1 - \frac{\varepsilon}{3} - \frac{\varepsilon^2}{5} + \frac{23}{135}\varepsilon^3 - \sum_{i=1}^{i=3} x_{2i}^0 - \frac{2}{3}\varepsilon X_2' - \frac{\varepsilon^2}{7} X_2'' + \frac{241}{27 \times 35}\varepsilon^3 X_2' \right. \\ &\quad \left. + \frac{12}{35}\varepsilon^2 X_4' - \frac{4}{35}\varepsilon^3 X_4' + \sum_{i=1}^{i=3} x_{2i}' \right], \end{aligned}$$

on a, en négligeant les termes d'ordre supérieur au troisième,

$$\begin{aligned} r'^{u+2} = & a^{u+2} \left[ 1 + (u+2) \left( -\frac{\varepsilon}{3} - \frac{\varepsilon^2}{5} + \frac{23}{135} \varepsilon^3 - \sum_{i=1}^{i=3} x_{2i}' - \frac{2}{3} \varepsilon X_2' - \frac{\varepsilon^2}{7} X_2'' \right) \right. \\ & + \frac{241}{27 \times 35} \varepsilon^3 X_2' + \frac{12}{35} \varepsilon^2 X_4' - \frac{4}{35} \varepsilon^3 X_4' + \sum_{i=1}^{i=3} x_{2i}' + \frac{1}{2} (u+2)(u+1) \left( \frac{\varepsilon^2}{9} \right. \\ & + \frac{4}{9} \varepsilon^2 X_2'' + \frac{4}{9} \varepsilon^2 X_2' + \frac{2}{15} \varepsilon^3 + \frac{38}{105} \varepsilon^3 X_2' - \frac{8}{35} \varepsilon^3 X_4' + \frac{4}{21} \varepsilon^3 X_2'' - \frac{16}{35} \varepsilon^3 X_2' X_4' \left. \right) \\ & \left. - \frac{1}{6} (u+2)(u+1) u \left( \frac{\varepsilon^3}{27} + \frac{8}{27} \varepsilon^3 X_2'' + \frac{2}{9} \varepsilon^3 X_2' + \frac{4}{9} \varepsilon^3 X_2'' \right) \right]. \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\sec \eta = 1 + \frac{4}{15} \varepsilon^2 + \frac{12}{35} \varepsilon^3 + \frac{4}{21} \varepsilon^2 X_2' - \frac{4}{21} \varepsilon^3 X_2' - \frac{16}{35} \varepsilon^2 X_4' - \frac{16 \times 17}{11 \times 35} \varepsilon^3 X_4' + \frac{128}{11 \times 21} \varepsilon^3 X_2''$$

au quatrième ordre près.

Nous aurons, par conséquent, après avoir explicité  $X_2''$ ,  $X_2'''$  et  $X_2' X_4'$ ,

$$\begin{aligned} Z = & \frac{G a}{4\pi} \sum_{n=0}^{n=\infty} \left( \frac{a}{r} \right)^{n+1} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left\{ 1 + \frac{\alpha}{2} - \frac{3}{8} \beta + \frac{\alpha^2}{4} + \frac{5}{16} \delta - \frac{3}{8} \alpha \beta + \frac{\alpha^3}{8} \right. \\ & + (u+2) \left[ -\frac{\varepsilon}{3} - \frac{\varepsilon^2}{5} - \frac{\alpha \varepsilon}{6} + \frac{\beta \varepsilon}{8} - \frac{\alpha^2 \varepsilon}{12} - \frac{\alpha \varepsilon^2}{10} + \frac{11}{135} \varepsilon^3 - \sum_{i=1}^{i=3} x_{2i}' + (u+1) \left( \frac{\varepsilon^2}{18} + \frac{\varepsilon^3}{15} \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\alpha \varepsilon^2}{36} - \frac{n}{6 \times 27} \varepsilon^3 \right) \right] + \frac{4}{15} \varepsilon^2 + \frac{2}{15} \alpha \varepsilon^2 + \frac{12}{35} \varepsilon^3 + \left[ \alpha + \frac{\alpha^2}{2} - \frac{3}{8} \alpha \beta + \frac{\alpha^3}{4} \right. \\ & \left. + (u+2) \left( -\frac{2}{3} \varepsilon - \frac{2}{3} \alpha \varepsilon - \frac{\varepsilon^2}{7} - \frac{\alpha^2 \varepsilon}{3} - \frac{19}{70} \alpha \varepsilon^2 + \frac{\beta \varepsilon}{4} + \frac{13}{15 \times 63} \varepsilon^3 \right) \right. \\ & \left. + (u+2)(u+1) \left( \frac{2}{9} \varepsilon^2 + \frac{19}{105} \varepsilon^3 + \frac{\alpha \varepsilon^2}{6} - \frac{n}{27} \varepsilon^3 \right) + \frac{4}{21} \varepsilon^2 - \frac{4}{21} \varepsilon^3 + \frac{38}{105} \alpha \varepsilon^2 \right] X_2' \\ & + \left[ \beta + \frac{\alpha \beta}{2} + (u+2) \left( \frac{12}{35} \varepsilon^2 - \frac{\beta \varepsilon}{3} + \frac{6}{35} \alpha \varepsilon^2 + \frac{4}{105} \varepsilon^3 \right) - (u+2)(u+1) \frac{4}{35} \varepsilon^3 \right. \\ & \left. - \frac{16}{35} \varepsilon^2 - \frac{8}{35} \alpha \varepsilon^2 - \frac{16 \times 17}{11 \times 35} \varepsilon^3 \right] X_4' + \left[ \delta + \frac{128}{11 \times 21} \varepsilon^3 \right] X_6' \\ & + \left[ (u+2) \left( -\frac{2}{3} \alpha \varepsilon - \frac{\alpha^2 \varepsilon}{3} - \frac{\alpha \varepsilon^2}{7} - \frac{8}{63} \varepsilon^3 \right) + (u+2)(u+1) \left( \frac{2}{9} \varepsilon^2 + \frac{2}{21} \varepsilon^3 + \frac{\alpha \varepsilon^2}{3} - \frac{2n}{27} \varepsilon^3 \right) \right. \\ & \left. + \frac{4}{21} \alpha \varepsilon^2 \right] \left( \frac{18}{35} X_4' + \frac{2}{7} X_2' + \frac{1}{5} \right) + \left[ (u+2) \left( -\frac{2}{3} \beta \varepsilon + \frac{12}{35} \alpha \varepsilon^2 + \frac{32}{105} \varepsilon^3 \right) - \frac{16}{35} \alpha \varepsilon^2 \right. \\ & \left. - (u+2)(u+1) \frac{8}{35} \varepsilon^3 \right] \left( \frac{5}{11} X_6' + \frac{20}{77} X_4' + \frac{2}{7} X_2' \right) + \frac{2}{9} (u+2)(u+1) (\alpha \varepsilon^2 - \frac{2}{9} n \varepsilon^3) \left( \frac{18}{77} X_6' \right. \\ & \left. + \frac{108}{385} X_4' + \frac{3}{7} X_2' + \frac{2}{35} \right) + (u+2) \sum_{i=1}^{i=3} x_{2i}' \left\} X_n \sin \theta' d\theta' d\varphi' \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= G a \left[ \frac{a}{r'} \left( 1 + \frac{\alpha}{2} - \frac{3}{8} \beta + \frac{\alpha^2}{4} + \frac{5}{16} \delta - \frac{3}{8} \alpha \beta + \frac{\alpha^3}{8} - \frac{2}{3} \varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{15} - \frac{3}{5} \alpha \varepsilon + \frac{\beta \varepsilon}{4} \right. \right. \\
 &- \frac{3}{10} \alpha^2 \varepsilon + \frac{9}{70} \alpha \varepsilon^2 + \frac{4 \times 148}{21 \times 45} \varepsilon^3 - 2 \sum_{n=1}^{n=3} x_{2n}^0 \left. \right) + \left( \frac{a}{r'} \right)^3 \left( \alpha + \frac{\alpha^2}{2} - \frac{3}{8} \alpha \beta + \frac{\alpha^3}{4} \right. \\
 &- \frac{8}{3} \varepsilon - \frac{24}{7} \alpha \varepsilon - \frac{12}{7} \alpha^2 \varepsilon + \frac{26}{7} \alpha \varepsilon^2 + \frac{64}{21} \varepsilon^2 + \frac{5}{21} \beta \varepsilon - \frac{4 \times 203}{7 \times 21 \times 45} \varepsilon^3 \left. \right) \frac{X_2}{5} \\
 &+ \left( \frac{a}{r'} \right)^5 \left( \beta + \frac{\alpha \beta}{2} + \frac{176}{35} \varepsilon^2 - \frac{234}{77} \beta \varepsilon + \frac{4 \times 69}{35} \alpha \varepsilon^2 - \frac{8 \times 499}{5 \times 77} \varepsilon^3 - \frac{4 \times 18}{35} \alpha \varepsilon \right. \\
 &- \left. \frac{36}{35} \alpha^2 \varepsilon \right) \frac{X_4}{9} + \left( \frac{a}{r'} \right)^7 \left( \delta - \frac{64 \times 29}{11 \times 21} \varepsilon^3 + \frac{16 \times 19}{77} \alpha \varepsilon^2 - \frac{80}{33} \beta \varepsilon \right) \frac{X_6}{13} + \sum_{n=1}^{n=3} \left( \frac{a}{r'} \right)^{2n+1} \frac{2n+2}{4n+1} x_{2n} \left. \right].
 \end{aligned}$$

Or, nous avons respectivement, aux quatrième, troisième, deuxième et premier ordres près,

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{r'} &= \frac{1}{a} \left[ 1 + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{14}{45} \varepsilon^2 + \sum_{n=1}^{n=3} x_{2n}^0 + \left( \frac{2}{3} \varepsilon + \frac{37}{63} \varepsilon^2 + \frac{311}{15 \times 63} \varepsilon^3 \right) X_2 - \frac{4}{35} (3 \varepsilon^2 \right. \\
 &+ \left. \varepsilon^3) X_4 + \frac{4}{9} (\varepsilon^2 + \frac{10}{7} \varepsilon^3) X_2^2 - \frac{16}{35} \varepsilon^3 X_2 X_4 + \frac{8}{27} \varepsilon^3 X_2^3 - \sum_{n=1}^{n=3} x_{2n} \right]; \\
 \frac{1}{r^3} &= \frac{1}{a^3} \left[ 1 + \varepsilon + \frac{19}{15} \varepsilon^2 + (2 \varepsilon + \frac{65}{21} \varepsilon^2) X_2 - \frac{36}{35} \varepsilon^2 X_4 + \frac{8}{3} \varepsilon^2 X_2^2 \right]; \\
 \frac{1}{r^5} &= \frac{1}{a^5} \left[ 1 + \frac{5}{3} \varepsilon + \frac{10}{3} \varepsilon X_2 \right], \quad \frac{1}{r^7} = \frac{1}{a^7}, \quad \frac{1}{r^{2n+1}} = \frac{1}{a^{2n+1}} \quad (n = 1, 2, 3).
 \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
 Z &= G a \left[ 1 + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{14}{45} \varepsilon^2 + \sum_{n=1}^{n=3} x_{2n}^0 + \left( \frac{2}{3} \varepsilon + \frac{37}{63} \varepsilon^2 + \frac{311}{15 \times 63} \varepsilon^3 \right) X_2 \right. \\
 &- \left( \frac{12}{35} \varepsilon^2 + \frac{4}{35} \varepsilon^3 \right) X_4 + \left( \frac{4}{9} \varepsilon^2 + \frac{40}{63} \varepsilon^3 \right) X_2^2 - \frac{16}{35} \varepsilon^3 X_2 X_4 + \frac{8}{27} \varepsilon^3 X_2^3 \\
 &- \sum_{n=1}^{n=3} x_{2n} + \left( \frac{\alpha}{2} - \frac{2}{3} \varepsilon \right) \left( 1 + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{14}{45} \varepsilon^2 + \frac{2}{3} \varepsilon X_2 + \frac{37}{63} \varepsilon^2 X_2 - \frac{12}{35} \varepsilon^2 X_4 + \frac{4}{9} \varepsilon^2 X_2^2 \right) \\
 &+ \left( -\frac{3}{8} \beta + \frac{\alpha^2}{4} - \frac{3}{5} \alpha \varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{15} \right) \left( 1 + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{2}{3} \varepsilon X_2 \right) + \frac{5}{16} \delta - \frac{3}{8} \alpha \beta + \frac{\alpha^3}{8} + \frac{\beta \varepsilon}{4} - \frac{3}{10} \alpha^2 \varepsilon \\
 &+ \frac{9}{70} \alpha \varepsilon^2 + \frac{4 \times 148}{21 \times 45} \varepsilon^3 - 2 \sum_{n=1}^{n=3} x_{2n}^0 + \left( \frac{\alpha}{5} - \frac{8}{15} \varepsilon \right) \left( 1 + \varepsilon + \frac{19}{15} \varepsilon^2 + 2 \varepsilon X_2 + \frac{65}{21} \varepsilon^2 X_2 \right. \\
 &- \left. \frac{36}{35} \varepsilon^2 X_4 + \frac{8}{3} \varepsilon^3 X_2^2 \right) X_2 + \left( \frac{\alpha^2}{10} - \frac{24}{35} \alpha \varepsilon + \frac{64}{105} \varepsilon^2 \right) \left( 1 + \varepsilon + 2 \varepsilon X_2 \right) X_2 + \left( -\frac{3}{40} \alpha \beta \right. \\
 &+ \left. \frac{\alpha^3}{20} - \frac{12}{35} \alpha^2 \varepsilon + \frac{26}{35} \alpha \varepsilon^2 + \frac{\beta \varepsilon}{21} - \frac{4 \times 203}{35 \times 21 \times 45} \varepsilon^3 \right) X_2 + \left( \frac{\beta}{9} + \frac{176}{9 \times 35} \varepsilon^2 - \frac{8}{35} \alpha \varepsilon \right) \left( 1 + \frac{5}{3} \varepsilon \right. \\
 &+ \left. \frac{10}{3} \varepsilon X_2 \right) X_4 + \left( \frac{\alpha \beta}{18} - \frac{26}{77} \beta \varepsilon + \frac{4 \times 23}{105} \alpha \varepsilon^2 - \frac{8 \times 499}{45 \times 77} \varepsilon^3 - \frac{4}{35} \alpha^2 \varepsilon \right) X_4 + \left( \delta - \frac{64 \times 29}{11 \times 21} \varepsilon^3 \right. \\
 &+ \left. \frac{16 \times 19}{77} \alpha \varepsilon^2 - \frac{80}{33} \beta \varepsilon \right) \frac{X_6}{13} + \sum_{n=1}^{n=3} \frac{2n+2}{4n+1} x_{2n} \left. \right].
 \end{aligned}$$



Si nous explicitons ensuite  $X_2^2$ ,  $X_3^2$  et  $X_2X_4$  et si nous groupons les termes, nous obtenons finalement, au quatrième ordre près,

$$\begin{aligned} Z = & G a \left[ 1 - \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\alpha}{2} + \frac{7}{5 \times 45} \varepsilon^2 - \frac{53}{150} \alpha \varepsilon + \frac{\alpha^2}{4} - \frac{3}{8} \beta + \frac{1693}{35 \times 135} \varepsilon^3 + \frac{3}{350} \alpha \varepsilon^2 \right. \\ & + \frac{5}{16} \delta - \frac{3}{8} \alpha \beta + \frac{\alpha^3}{8} + \frac{\beta \varepsilon}{8} - \frac{53}{300} \alpha^2 \varepsilon - \sum_{n=1}^{n=3} x_{2n}^0 + \left( \frac{\alpha}{5} + \frac{2}{15} \varepsilon + \frac{13}{21 \times 15} \varepsilon^2 \right. \\ & \left. \left. - \frac{4}{105} \alpha \varepsilon + \frac{\alpha^2}{10} - \frac{281}{35 \times 135} \varepsilon^3 - \frac{3}{40} \alpha \beta + \frac{\alpha^3}{20} + \frac{1}{210} \alpha \varepsilon^2 - \frac{73}{36 \times 21} \beta \varepsilon - \frac{2}{105} \alpha^2 \varepsilon \right) X_2 \right. \\ & + \left( \frac{\beta}{9} - \frac{4 \times 41}{25 \times 63} \varepsilon^2 - \frac{4}{5 \times 35} \alpha \varepsilon + \frac{\alpha \beta}{18} + \frac{4 \times 23}{99 \times 25} \varepsilon^3 - \frac{4 \times 73}{33 \times 35 \times 5} \alpha \varepsilon^2 - \frac{13}{3 \times 77} \beta \varepsilon - \frac{2}{5 \times 35} \alpha^2 \varepsilon \right) X_4 \\ & \left. + \frac{1}{13} \left( \delta + \frac{29 \times 32}{77 \times 135} \varepsilon^3 - \frac{70}{9 \times 33} \beta \varepsilon - \frac{4 \times 43}{15 \times 77} \alpha \varepsilon^2 \right) X_6 - \sum_{n=1}^{n=3} \frac{2n-1}{4n+1} x_{2n} \right]. \end{aligned}$$

Écrivons encore

$$X + Y + Z = C$$

ou

$$\begin{aligned} & \frac{m G a}{3} \left[ 1 - \frac{2}{5} \varepsilon - \frac{9}{35} \varepsilon^2 + \left( -1 - \frac{2}{7} \varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{7} \right) X_2 + \frac{12}{35} (2\varepsilon + \frac{17}{11} \varepsilon^2) X_4 \right. \\ & \left. - \frac{32}{77} \varepsilon^2 X_6 \right] + \frac{2m G a}{3} \left[ 1 - \frac{2}{3} \varepsilon + \frac{13}{75} \varepsilon^2 + \frac{2}{15} (2\varepsilon + \frac{11}{35} \varepsilon^2) X_2 - \frac{16 \times 47}{35 \times 105} \varepsilon^2 X_4 \right. \\ & + G a \left[ 1 - \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\alpha}{2} + \frac{7}{5 \times 45} \varepsilon^2 - \frac{53}{150} \alpha \varepsilon + \frac{\alpha^2}{4} - \frac{3}{8} \beta + \frac{1693}{35 \times 135} \varepsilon^3 + \frac{3}{350} \alpha \varepsilon^2 \right. \\ & + \frac{5}{16} \delta - \frac{3}{8} \alpha \beta + \frac{\alpha^3}{8} + \frac{\beta \varepsilon}{8} - \frac{53}{300} \alpha^2 \varepsilon - \sum_{n=1}^{n=3} x_{2n}^0 + \left( \frac{\alpha}{5} + \frac{2}{15} \varepsilon + \frac{13}{21 \times 15} \varepsilon^2 \right. \\ & \left. \left. - \frac{4}{105} \alpha \varepsilon + \frac{\alpha^2}{10} - \frac{281}{35 \times 135} \varepsilon^3 - \frac{3}{40} \alpha \beta + \frac{\alpha^3}{20} + \frac{1}{210} \alpha \varepsilon^2 - \frac{73}{36 \times 21} \beta \varepsilon - \frac{2}{105} \alpha^2 \varepsilon \right) X_2 \right. \\ & + \left( \frac{\beta}{9} - \frac{4 \times 41}{25 \times 63} \varepsilon^2 - \frac{4}{5 \times 35} \alpha \varepsilon + \frac{\alpha \beta}{18} + \frac{4 \times 23}{99 \times 25} \varepsilon^3 - \frac{4 \times 73}{33 \times 35 \times 5} \alpha \varepsilon^2 - \frac{13}{3 \times 77} \beta \varepsilon - \frac{2}{5 \times 35} \alpha^2 \varepsilon \right) X_4 \\ & \left. + \frac{1}{13} \left( \delta + \frac{29 \times 32}{77 \times 135} \varepsilon^3 - \frac{70}{9 \times 33} \beta \varepsilon - \frac{4 \times 43}{15 \times 77} \alpha \varepsilon^2 \right) X_6 - \sum_{n=1}^{n=3} \frac{2n-1}{4n+1} x_{2n} \right] = C, \end{aligned}$$

et égalons à zéro les harmoniques zonaux de même ordre, en tenant compte de (63). Il viendra

$$\begin{aligned} & \frac{m G a}{3} \left[ 1 - \frac{2}{5} \varepsilon - \frac{9}{35} \varepsilon^2 \right] + \frac{2m G a}{3} \left[ 1 - \frac{2}{3} \varepsilon + \frac{13}{75} \varepsilon^2 \right] + G a \left[ 1 - \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\alpha}{2} + \frac{7}{5 \times 45} \varepsilon^2 \right. \\ & \left. - \frac{53}{150} \alpha \varepsilon + \frac{\alpha^2}{4} - \frac{3}{8} \beta + \frac{1693}{35 \times 135} \varepsilon^3 + \frac{3}{350} \alpha \varepsilon^2 + \frac{5}{16} \delta - \frac{3}{8} \alpha \beta + \frac{\alpha^3}{8} + \frac{\beta \varepsilon}{8} - \frac{53}{300} \alpha^2 \varepsilon \right. \\ & \left. - \sum_{n=1}^{n=3} x_{2n}^0 \right] = C; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{m G a}{3} \left[ -1 - \frac{2}{7} \varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{7} \right] + \frac{2 m G a}{3} \left[ \frac{4}{15} \varepsilon + \frac{22}{15 \times 35} \varepsilon^2 \right] + G a \left[ \frac{\alpha}{5} + \frac{2}{15} \varepsilon + \frac{13}{21 \times 15} \varepsilon^2 \right. \\
 & - \frac{4}{105} \alpha \varepsilon + \frac{\alpha^2}{40} - \frac{281}{35 \times 135} \varepsilon^3 - \frac{3}{40} \alpha \beta + \frac{\alpha^3}{20} + \frac{1}{210} \alpha \varepsilon^2 - \frac{73}{36 \times 24} \beta \varepsilon - \frac{2}{105} \alpha^2 \varepsilon \\
 & \left. + \frac{28}{5 \times 135} \varepsilon^3 \right] = 0; \\
 & \frac{m G a}{3} \left[ \frac{24}{35} \varepsilon + \frac{12 \times 17}{11 \times 35} \varepsilon^2 \right] - \frac{2}{3} m G a \frac{16 \times 47}{35 \times 105} \varepsilon^2 + G a \left[ \frac{\beta}{9} - \frac{4 \times 41}{25 \times 63} \varepsilon^2 - \frac{4}{5 \times 35} \alpha \varepsilon \right. \\
 & \left. + \frac{\alpha \beta}{18} + \frac{4 \times 23}{99 \times 25} \varepsilon^3 - \frac{4 \times 73}{33 \times 35 \times 5} \alpha \varepsilon^2 - \frac{13}{3 \times 77} \beta \varepsilon - \frac{2}{5 \times 35} \alpha^2 \varepsilon - \frac{4}{33} \varepsilon^3 \right] = 0; \\
 & - \frac{m G a}{3} \frac{32}{77} \varepsilon^2 + \frac{G a}{13} \left[ \delta + \frac{29 \times 32}{77 \times 135} \varepsilon^3 - \frac{70}{9 \times 33} \beta \varepsilon - \frac{4 \times 43}{15 \times 77} \alpha \varepsilon^2 + \frac{200}{231} \varepsilon^3 \right] = 0.
 \end{aligned}$$

Les trois dernières équations peuvent encore s'écrire

$$\begin{aligned}
 & \frac{\alpha}{5} - \frac{m}{3} + \frac{2}{15} \varepsilon + \frac{26}{15 \times 21} m \varepsilon + \frac{13}{5 \times 63} \varepsilon^2 + \frac{\alpha^2}{40} - \frac{4}{105} \alpha \varepsilon + \frac{17}{3 \times 75} m \varepsilon^2 \\
 & - \frac{17}{7 \times 135} \varepsilon^3 - \frac{3}{40} \alpha \beta + \frac{\alpha^3}{20} + \frac{1}{210} \alpha \varepsilon^2 - \frac{73}{36 \times 24} \beta \varepsilon - \frac{2}{105} \alpha^2 \varepsilon = 0; \\
 & \frac{\beta}{9} + \frac{8}{35} m \varepsilon - \frac{4 \times 41}{35 \times 45} \varepsilon^2 - \frac{4}{5 \times 35} \alpha \varepsilon + \frac{4 \times 1249}{33 \times 35 \times 105} m \varepsilon^2 - \frac{4 \times 52}{33 \times 75} \varepsilon^3 \\
 & + \frac{\alpha \beta}{18} - \frac{4 \times 73}{33 \times 35 \times 5} \alpha \varepsilon^2 - \frac{13}{3 \times 77} \beta \varepsilon - \frac{2}{5 \times 35} \alpha^2 \varepsilon = 0; \\
 & \frac{\delta}{13} - \frac{32}{3 \times 77} m \varepsilon^2 + \frac{8 \times 1241}{77 \times 39 \times 45} \varepsilon^3 - \frac{70}{9 \times 13 \times 33} \beta \varepsilon - \frac{4 \times 43}{13 \times 15 \times 77} \alpha \varepsilon^2 = 0.
 \end{aligned}$$

Si nous négligeons les termes du troisième ordre, les première et deuxième des équations précédentes nous donneront respectivement

$$\begin{aligned}
 \alpha &= \frac{5}{3} m - \frac{2}{3} \varepsilon + \frac{64}{63} m \varepsilon - \frac{25}{18} m^2 - \frac{5}{9} \varepsilon^2, \\
 \beta &= \frac{4}{5} \varepsilon^2 - \frac{12}{7} m \varepsilon.
 \end{aligned}$$

Si nous portons ces valeurs dans la troisième, nous aurons

$$\delta = \frac{4 \times 95}{11 \times 24} m \varepsilon^2 - \frac{8 \times 25}{11 \times 24} \varepsilon^3,$$

quantité qui est bien du troisième ordre (1).

(1) Le calcul de  $\delta$  est rigoureux, car pour le faire, il suffit de s'en tenir aux termes du premier ordre de  $\alpha$  et du second de  $\beta$ . C'est ce qui justifie ici, l'emploi du procédé par approximations successives.

Si nous les introduisons dans les termes autres que  $\alpha$  et  $\beta$  de la première et de la seconde équation, nous obtiendrons, au quatrième ordre près,

$$\alpha = \frac{5}{3} m - \frac{2}{3} \varepsilon + \frac{64}{63} m \varepsilon - \frac{25}{18} m^2 - \frac{5}{9} \varepsilon^2 + \frac{524}{21 \times 35} m \varepsilon^2 - \frac{5 \times 29}{63} m^2 \varepsilon - \frac{64}{45 \times 21} \varepsilon^2 + \frac{125}{108} m^3,$$

$$\beta = \frac{4}{5} \varepsilon^2 - \frac{12}{7} m \varepsilon - \frac{2 \times 6991}{77 \times 105} m \varepsilon^2 + \frac{10}{7} m^2 \varepsilon + \frac{4 \times 61}{11 \times 21} \varepsilon^3.$$

La gravité normale en un point de l'ellipsoïde représenté par l'équation (7) aura donc pour expression

$$\gamma = G \left[ 1 + \left( \alpha + \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^3}{4} - \frac{3}{4} \alpha \beta \right) \left( \frac{1}{2} + X_2 \right) + \frac{3}{8} \alpha \beta X_2 + \beta \left( -\frac{3}{8} + X_4 \right) + \frac{\alpha \beta}{2} X_4 + \gamma \left( \frac{5}{16} + X_6 \right) \right]$$

ou

$$\gamma = G \left[ 1 + \left( \frac{5}{3} m - \frac{2}{3} \varepsilon - \frac{2}{21} m \varepsilon - \frac{1}{3} \varepsilon^2 - \frac{537}{7 \times 35} m \varepsilon^2 + \frac{15}{14} m^2 \varepsilon + \frac{22}{35} \varepsilon^3 \right) \left( \frac{1}{2} + X_2 \right) + \left( \frac{13}{14} m \varepsilon^2 - \frac{1}{5} \varepsilon^3 - \frac{15}{14} m^2 \varepsilon \right) X_2 + \left( \frac{4}{5} \varepsilon^2 - \frac{12}{7} m \varepsilon - \frac{2 \times 6991}{77 \times 105} m \varepsilon^2 + \frac{10}{7} m^2 \varepsilon + \frac{4 \times 61}{11 \times 21} \varepsilon^3 \right) \left( -\frac{3}{8} + X_4 \right) + \left( \frac{26}{21} m \varepsilon^2 - \frac{4}{15} \varepsilon^3 - \frac{10}{7} m^2 \varepsilon \right) X_4 + \left( \frac{4 \times 95}{11 \times 21} m \varepsilon^2 - \frac{8 \times 25}{11 \times 21} \varepsilon^3 \right) \left( \frac{5}{16} + X_6 \right) \right],$$

ou encore

$$\gamma = G \left[ 1 + \left( \frac{5}{2} m - \varepsilon + \frac{44}{7} m \varepsilon - \frac{7}{2} \varepsilon^2 + \frac{8 \times 47}{35} m \varepsilon^2 - 8 \varepsilon^3 \right) \cos^2 \theta + \left( \frac{7}{2} \varepsilon^2 - \frac{15}{2} m \varepsilon - \frac{967}{28} m \varepsilon^2 + \frac{41}{2} \varepsilon^3 \right) \cos^4 \theta + \left( \frac{95}{4} m \varepsilon^2 - \frac{25}{2} \varepsilon^3 \right) \cos^6 \theta \right].$$

On exprime cette formule en fonction de la latitude  $\varphi$  de l'ellipsoïde de révolution en faisant usage des formules suivantes de transformations dont la démonstration est donnée à l'Annexe 5 :

$$\cos^2 \theta = (1 - \varepsilon^2) \sin^2 \varphi - \varepsilon \left( 1 + \frac{\varepsilon}{2} \right) \sin^2 2\varphi + \varepsilon^2 \sin^2 3\varphi;$$

$$\cos^4 \theta = \left( 1 - \frac{\varepsilon}{2} \right) \sin^2 \varphi - \left( \frac{1}{4} + \varepsilon \right) \sin^2 2\varphi + \frac{\varepsilon}{2} \sin^2 3\varphi;$$

$$\cos^6 \theta = \frac{15}{16} \sin^2 \varphi - \frac{3}{8} \sin^2 2\varphi + \frac{1}{16} \sin^2 3\varphi.$$

Il vient alors

$$\begin{aligned} \gamma = G \left[ 1 + \left( \frac{5}{2} m - \varepsilon - \frac{17}{14} m \varepsilon - \frac{621}{2240} m \varepsilon^2 + \frac{1}{32} \varepsilon^3 \right) \sin^2 \varphi \right. \\ \left. + \left( \frac{\varepsilon^2}{8} - \frac{5}{8} m \varepsilon - \frac{69}{224} m \varepsilon^2 + \frac{1}{16} \varepsilon^3 \right) \sin^2 2 \varphi \right. \\ \left. + \left( \frac{15}{64} m \varepsilon^2 - \frac{1}{32} \varepsilon^3 \right) \sin^2 3 \varphi \right]. \end{aligned}$$

Dans cette formule les termes des premier et deuxième ordres sont les mêmes que dans la formule de DE GRAAF HUNTER.

En partant des valeurs

$$\varepsilon = 0.003\ 367\ 003\ 367 \quad m = 0.003\ 467\ 827\ 189$$

on obtient

$$\begin{aligned} \gamma = G [1 + 0.005\ 288\ 376\ 454 \sin^2 \varphi - 0.000\ 005\ 890\ 251 \sin^2 2 \varphi \\ + 0.000\ 000\ 008\ 021 \sin^2 3 \varphi]. \end{aligned} \quad (63)$$

Les termes du troisième ordre ont respectivement comme valeur

$$\begin{aligned} - \frac{621}{2240} m \varepsilon^2 + \frac{1}{32} \varepsilon^3 &= - 0.000\ 000\ 009\ 906; \\ - \frac{69}{224} m \varepsilon^2 + \frac{1}{16} \varepsilon^3 &= - 0.000\ 000\ 009\ 724; \\ \frac{15}{64} m \varepsilon^2 - \frac{1}{32} \varepsilon^3 &= + 0.000\ 000\ 008\ 021. \end{aligned}$$

Leur valeur est négligeable en pratique.

La formule (63) peut utilement être comparée à celle que CASSINIS [10] a établie par une autre voie :

$$\gamma = G [1 + 0.005\ 288\ 384 \sin^2 \varphi - 0.000\ 005\ 869 \sin^2 2 \varphi - 0.000\ 000\ 022 \sin^2 \varphi \sin^2 2 \varphi] \quad (64)$$

que nous pouvons ramener à la forme de (63) en développant le dernier terme. On a en effet

$$\begin{aligned} \sin^2 \varphi \sin^2 2 \varphi &= 4 \sin^4 \varphi \cos^2 \varphi = \sin^2 2 \varphi - 4 \cos^4 \varphi \sin^2 \varphi \\ &= \sin^2 \varphi - \frac{1}{4} \sin^2 3 \varphi - \frac{1}{2} \sin^2 2 \varphi + \frac{1}{4} \sin^2 \varphi = \frac{1}{4} \sin^2 \varphi + \frac{1}{2} \sin^2 2 \varphi - \frac{1}{4} \sin^2 3 \varphi. \end{aligned}$$

La formule de CASSINIS devient alors

$$\gamma = G [1 + 0.005\ 288\ 376 \sin^2 \varphi - 0.000\ 005\ 880 \sin^2 2 \varphi + 0.000\ 000\ 006 \sin^2 3 \varphi]. \quad (65)$$

La différence entre les formules (65) et (63) est insignifiante en pratique.



Nous avons aussi

$$X_{2r-2} = q_0 + q_1 \mu^2 + \dots + q_{r-1} \mu^{2r-2};$$

d'où

$$\mu^{2r-2} = \frac{1}{q_{r-1}} X_{2r-2} \frac{q_0}{q_{r-1}} - \frac{q_1}{q_{r-1}} \mu^2 - \dots - \frac{q_{r-2}}{q_{r-1}} \mu^{2r-4}.$$

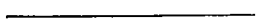
Le produit devient alors

$$\begin{aligned} X_{2j} X_{2k} \dots X_{2s} &= l_0 m_0 \dots p_0 - \frac{l_j m_k \dots p_s r_0}{r_r} - (l_{j-1} m_k \dots p_s + l_j \dots p_s + l_j m_{k-1} \dots p_s + \dots \\ &+ l_j m_k \dots p_{s-1} - \frac{l_j m_k \dots p_s r_{r-1}}{r_r}) \frac{q_0}{q_{r-1}} + [l_1 m_0 \dots p_0 + l_0 m_1 \dots p_0 + \dots \\ &+ l_0 m_0 \dots p_1 - \frac{l_j m_k \dots p_s r_1}{r_r} - (l_{j-1} m_k \dots p_s + l_j m_{k-1} \dots p_s + \dots + l_s m_k \dots p_{s-1} \\ &- \frac{l_j m_k \dots p_s r_{r-1}}{r_r}) \frac{q_1}{q_{r-1}}] \mu^2 + \dots + [\dots] \mu^{2r-4} + (l_{j-1} m_k \dots p_s \\ &+ l_j m_{k-1} \dots p_s + \dots + l_j m_k \dots p_{s-1} - \frac{l_j m_k \dots p_s r_{r-1}}{r_r}) \frac{1}{q_{r-1}} X_{2r-2} \\ &+ \frac{l_j m_k \dots p_s}{r_r} X_{2s}. \end{aligned}$$

En continuant de même, on parviendra finalement à une égalité de la forme

$$X_{2j} X_{2k} \dots X_{2s} = C_0 + C_1 X_2 + C_2 X_4 + \dots + C_r X_{2r}$$

les  $C_i$  étant des coefficients numériques.



## ANNEXE 2

Soient

$$\begin{aligned} r &= a \left( 1 + \sum_{i=1}^{i=l} \alpha_i X_{2i} + \sum_{n=0}^{n=\infty} u_n \right), \\ R &= a \left( 1 + \sum_{i=1}^{i=l} \alpha_i X_{2i} + \sum_{n=0}^{n=\infty} v_n \right), \end{aligned}$$

respectivement les équations du géoïde compensé et de la figure de référence.

Exprimons qu'ils ont même volume

$$\iiint_{\mathbf{D}} d\tau' = \iiint_{\mathbf{D}'} d\tau'', \quad (1)$$

$\mathbf{D}$  et  $\mathbf{D}'$  désignant les domaines limités respectivement par le géoïde et la figure de référence.

Nous avons

$$\begin{aligned} d\tau' &= r'^2 \sec \tau_1 \sec \tau_2 \sin \theta' d\theta' d\varphi' dr', \\ d\tau'' &= R'^2 \sec \tau_1 \sec \tau_2 \sin \theta' d\theta' d\varphi' dR'. \end{aligned}$$

Or, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} r' &= a' \left( 1 + \sum_{i=1}^{i=l} \alpha_i X'_{2i} + \sum_{n=0}^{n=\infty} u'_n \right), \\ R' &= a'' \left( 1 + \sum_{i=1}^{i=l} \alpha_i X'_{2i} + \sum_{n=0}^{n=\infty} v'_n \right), \end{aligned}$$

$a'$  et  $a''$  étant des paramètres variables, prenant la valeur  $a$  sur le géoïde et la figure de référence. D'où, à la précision indiquée,

$$\begin{aligned} r'^2 &= a'^2 \left( 1 + 2 \sum_{i=1}^{i=l} \alpha_i X'_{2i} + \dots + 2 \sum_{n=0}^{n=\infty} u'_n \right), \\ R'^2 &= a''^2 \left( 1 + 2 \sum_{i=1}^{i=l} \alpha_i X'_{2i} + \dots + 2 \sum_{n=0}^{n=\infty} v'_n \right). \end{aligned}$$

D'ailleurs,

$$dV' = \left(1 + \sum_{i=1}^{i=l} \alpha_i X_{2i}' + \sum_{n=0}^{n=\infty} u_n'\right) da',$$

$$dR' = \left(1 + \sum_{i=1}^{i=l} \alpha_i X_{2i}' + \sum_{n=0}^{n=\infty} v_n'\right) da'.$$

L'égalité (1) ci-dessus devient par conséquent

$$\int_0^a \int_0^\pi \int_0^{2\pi} a'^2 \left(1 + 3 \sum_{i=1}^{i=l} \alpha_i X_{2i}' + \dots + 3 \sum_{n=0}^{n=\infty} u_n'\right) \sin \theta' d\theta' d\varphi' da'$$

$$= \int_0^a \int_0^\pi \int_0^{2\pi} a''^2 \left(1 + 3 \sum_{i=1}^{i=l} \alpha_i X_{2i}' + \dots + 3 \sum_{n=0}^{n=\infty} v_n'\right) \sin \theta' d\theta' d\varphi' da''$$

ou

$$\frac{4\pi}{3} a^3 (1 + 3 u_0) = \frac{4\pi}{3} a^3 (1 + 3 v_0);$$

d'où nous tirons

$$u_0 = v_0.$$

REMARQUE :

Si le volume du géoïde compensé est égal à celui de la sphère de rayon  $a$ , nous avons

$$\frac{4\pi}{3} a^3 (1 + 3 u_0) = \frac{4\pi}{3} a^3,$$

d'où

$$u_0 = 0.$$


---



## ANNEXE 3

Si nous exprimons que les composantes des centres de gravité du géoïde compensé et de la figure de référence sont les mêmes, nous aurons, en employant les notations de l'Annexe 1,

$$\frac{\iiint_{\mathbf{D}} x'_1 dm'}{\iiint_{\mathbf{D}} dm'} = \frac{\iiint_{\mathbf{D}'} \gamma'_1 dm''}{\iiint_{\mathbf{D}'} dm''}, \quad \frac{\iiint_{\mathbf{D}} x'_2 dm'}{\iiint_{\mathbf{D}} dm'} = \frac{\iiint_{\mathbf{D}} \gamma'_2 dm''}{\iiint_{\mathbf{D}} dm''}, \quad \frac{\iiint_{\mathbf{D}} x'_3 dm'}{\iiint_{\mathbf{D}} dm'} = \frac{\iiint_{\mathbf{D}'} \gamma'_3 dm''}{\iiint_{\mathbf{D}'} dm''},$$

où

$$dm' = \rho' d\tau' \quad dm'' = \rho'' d\tau'',$$

$\rho'$  et  $\rho''$  désignant les densités de volume respectivement du géoïde et de la surface référentielle.

Nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} \rho' &= a' g, \\ \rho'' &= a'' \gamma. \end{aligned}$$

La première des égalités précédentes deviendra donc

$$\begin{aligned} & \frac{G \int_0^a \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[ 1 + \sum_{i=1}^{i=l} \beta_i X'_{2i} + \sum_{n=1}^{n=\infty} (n-1) u'_n \right] \left[ 1 + 3 \sum_{i=1}^{i=l} \alpha_i X'_{2i} + \dots + 3 \sum_{n=1}^{n=\infty} u'_n \right] \left[ 1 + \sum_{i=0}^{i=l} \delta_i X'_{2i} \right] a'^3}{G \int_0^a \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[ 1 + \sum_{i=1}^{i=l} \beta_i X'_{2i} + \sum_{n=1}^{n=\infty} (n-1) u'_n \right] \left[ 1 + 3 \sum_{i=1}^{i=l} \alpha_i X'_{2i} + \dots + 3 \sum_{n=1}^{n=\infty} u'_n \right] \left[ 1 + \sum_{i=0}^{i=l} \delta_i X'_{2i} \right] a'^3} \\ & \frac{\cos \theta' \sin \theta' d\theta' d\varphi' da'}{\sin \theta' d\theta' d\varphi' da'} = \frac{G \int_0^a \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[ 1 + \sum_{i=1}^{i=l} \beta_i X'_{2i} + \sum_{n=1}^{n=\infty} (n-1) v'_n \right]}{G \int_0^a \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[ 1 + \sum_{i=1}^{i=l} \beta_i X'_{2i} + \sum_{n=1}^{n=\infty} (n-1) v'_n \right]} \\ & \frac{\left[ 1 + 3 \sum_{i=1}^{i=l} \alpha_i X'_{2i} + \dots + 3 \sum_{n=1}^{n=\infty} v'_n \right] \left[ 1 + \sum_{i=0}^{i=l} \delta_i X'_{2i} \right] a'^3 \cos \theta' \sin \theta' d\theta' d\varphi' da'}{\left[ 1 + 3 \sum_{i=1}^{i=l} \alpha_i X'_{2i} + \dots + 3 \sum_{n=1}^{n=\infty} v'_n \right] \left[ 1 + \sum_{i=0}^{i=l} \delta_i X'_{2i} \right] a'^3 \sin \theta' d\theta' d\varphi' da'} \end{aligned}$$

ou encore

$$\frac{\int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left[ 1 + \sum_{i=1}^{i=l} \beta_i X'_{2i} + 3 \sum_{i=1}^{i=l} \alpha_i X'_{2i} + \dots + \sum_{n=1}^{n=\infty} (n+2) u'_n \right] \cos \theta' \sin \theta' d\theta' d\varphi'}{\int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left[ 1 + \sum_{i=1}^{i=l} \beta_i X'_{2i} + 3 \sum_{i=1}^{i=l} \alpha_i X'_{2i} + \dots + \sum_{n=1}^{n=\infty} (n+2) u'_n \right] \sin \theta' d\theta' d\varphi'} \\ = \frac{\int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left[ 1 + \sum_{i=1}^{i=l} \beta_i X'_{2i} + 3 \sum_{i=1}^{i=l} \alpha_i X'_{2i} + \dots + \sum_{n=1}^{n=\infty} (n+2) v'_n \right] \cos \theta' \sin \theta' d\theta' d\varphi'}{\int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left[ 1 + \sum_{i=1}^{i=l} \beta_i X'_{2i} + 3 \sum_{i=1}^{i=l} \alpha_i X'_{2i} + \dots + \sum_{n=1}^{n=\infty} (n+2) v'_n \right] \sin \theta' d\theta' d\varphi'}$$

c'est-à-dire

$$4\pi u_1 = 4\pi v_1$$

ou

$$u_1 = v_1.$$

On parviendrait au même résultat si l'on partait des deux autres égalités.

En effet,

$$\begin{aligned} \alpha'_2 &= \gamma' \sin \theta' \cos \varphi' & \gamma'_2 &= R' \sin \theta' \cos \varphi' \\ \alpha'_3 &= \gamma' \sin \theta' \sin \varphi' & \gamma'_3 &= R' \sin \theta' \sin \varphi' \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \sin \theta' \cos \varphi' &\equiv [X_1(\cos \psi)]_{0=\frac{\pi}{2}, \varphi=0} \\ \sin \theta' \sin \varphi' &\equiv [X_1(\cos \psi)]_{0=\frac{\pi}{2}, \varphi=\frac{\pi}{2}}^{(1)}. \end{aligned}$$

---

<sup>(1)</sup>  $\cos \psi = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos (\varphi - \varphi')$ .

## ANNEXE 4

J. DE GRAAF HUNTER obtenait une égalité de la forme

$$C_0 + C_1 X_2 + C_2 X_2^2 = C^{te} \quad (1)$$

et il annulait séparément les coefficients de  $X_0$ ,  $X_2$  et  $X_2^2$ .

Notre procédé est équivalent au sien. En effet, nous pouvons encore écrire (1) sous la forme

$$C_0 + C_1 X_2 + C_2 \left( \frac{18}{35} X_4 + \frac{2}{7} X_2 + \frac{1}{5} \right) = C^{te}$$

ou

$$\left( C_0 + \frac{C_2}{5} \right) + (C_1 + \frac{2}{7} C_2) X_2 + \frac{18}{35} C_2 X_4 = C^{te}.$$

Si nous y annulons les coefficients de  $X_0$ ,  $X_2$  et  $X_4$  d'après une propriété connue, il vient

$$C_0 + \frac{C_2}{5} = C^{te},$$

$$C_1 + \frac{2}{7} C_2 = 0,$$

$$C_2 = 0,$$

c'est-à-dire les solutions qu'avait trouvées DE GRAAF HUNTER.

Plus généralement, si l'on a l'égalité

$$C_0 + C_1 X_2 + C_2 X_2^2 + \dots + C_n X_2^n = C^{te}$$

et si on l'écrit sous la forme équivalente

$$f_0(C_0, C_1, \dots, C_n) + f_1(C_1, C_2, \dots, C_n) X_2 + f_2(C_2, \dots, C_n) X_4 + \dots + f_n(C_n) X_{2n} = C^{te}$$

le système

$$f_0(C_0, C_1, \dots, C_n) = C^{te}, \quad f_1(C_1, C_2, \dots, C_n) = 0, \quad f_2(C_2, \dots, C_n) = 0, \dots, f_n(C_n) = 0$$

a pour solution unique, finie et déterminée,  $C_0 = C^{te}$ ,  $C_1 = 0$ , ...,  $C_n = 0$ .

En effet, supposons le théorème vrai pour  $n - 1$  :

$f_n(C_n)$  est de la forme  $a_n C_n$ , où  $a_n$  est un coefficient numérique; par conséquent,  $f_n(C_n) = 0$  a pour solution  $C_n = 0$ , et notre système devient

$$f_0(C_0, C_1, \dots, C_{n-1}) = C^{te}, \quad f_1(C_1, C_2, \dots, C_{n-1}) = 0, \dots, f_{n-1}(C_{n-1}) = 0,$$

lequel, par hypothèse, admet pour solution  $C_0 = C^{te}$ ,  $C_1 = 0$ , ...,  $C_{n-1} = 0$ . Or le théorème est vrai pour  $n = 1$ ,  $n = 2$ ; donc il est vrai pour toute valeur de  $n$ .

---

## ANNEXE 5

*Formule de transformation de l'argument  $\theta$  en latitude.*

La latitude  $\varphi$  d'un point A (fig. 1a) du sphéroïde est l'angle que fait la nor-

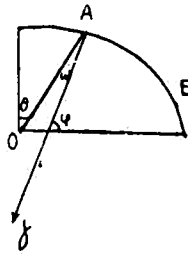


FIG. 1a.

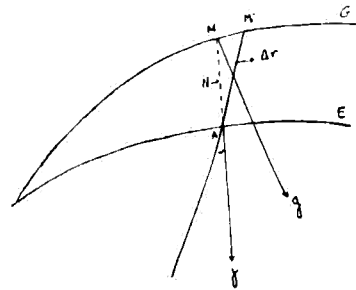


FIG. 1b.

male  $A\gamma$  avec l'axe  $Ox$ . Entre l'argument  $\theta$  du rayon vecteur  $OA$  et  $\varphi$ , on a la relation

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \theta + \omega, \quad (1)$$

d'où l'on déduit

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{cotg} \theta}{1 + \operatorname{tg} \varphi \operatorname{cotg} \theta}. \quad (2)$$

De l'équation de l'ellipsoïde

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{a^2(1-\varepsilon)^2} = 1$$

on tire

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{F'_z}{F'_x} = \frac{z}{x(1-\varepsilon)^2} = \frac{\operatorname{cotg} \theta}{(1-\varepsilon)^2}.$$

L'équation (2) peut donc s'écrire

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{\operatorname{tg} \varphi - (1 - \varepsilon)^2 \operatorname{tg} \varphi}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi (1 - \varepsilon)^2} = \frac{\varepsilon(2 - \varepsilon) \sin \varphi \cos \varphi}{1 - \varepsilon(2 - \varepsilon) \sin^2 \varphi} \quad (3)$$

ou, avec une approximation suffisante,

$$\operatorname{tg} \omega = \varepsilon \sin \varphi \cos \varphi [2 - \varepsilon(1 - 4 \sin^2 \varphi)]. \quad (3')$$

On a, d'autre part,

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \sin(\varphi - \omega) = \sin \varphi \cos \omega - \cos \varphi \sin \omega \\ &= \frac{\sin \varphi - \cos \varphi \operatorname{tg} \omega}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \omega}} \end{aligned}$$

ou, en tenant compte de (3'),

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \sin \varphi - \varepsilon \sin \varphi \cos^2 \varphi (2 - \varepsilon + 4 \varepsilon \sin^2 \varphi) \{1 - 2 \varepsilon^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi\} \\ &= \sin \varphi - 2 \varepsilon \sin \varphi \cos^2 \varphi + \varepsilon^2 \sin \varphi \cos^2 \varphi - 4 \varepsilon^2 \sin^3 \varphi \cos^2 \varphi \\ &\quad - 2 \varepsilon^2 \sin^3 \varphi \cos^2 \varphi + 2 \varepsilon^3 \sin^3 \varphi \cos^4 \varphi (2 - \varepsilon + 4 \varepsilon \sin^2 \varphi) \end{aligned}$$

ou encore, en négligeant les termes de la troisième puissance de  $\varepsilon$ ,

$$\cos \theta = \sin \varphi - 2 \varepsilon \sin \varphi \cos^2 \varphi + \varepsilon^2 \sin \varphi \cos^2 \varphi - 6 \varepsilon^2 \sin^3 \varphi \cos^2 \varphi \quad (4)$$

et

$$\cos^2 \theta = \sin^2 \varphi + 4 \varepsilon^2 \sin^2 \varphi \cos^4 \varphi - 4 \varepsilon \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + 2 \varepsilon^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi - 12 \varepsilon^2 \sin^4 \varphi \cos^2 \varphi \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \cos^2 \theta &= \sin^2 \varphi - \varepsilon \sin^2 2 \varphi + \frac{\varepsilon^2}{2} \sin^2 2 \varphi + 4 \varepsilon^2 \sin^2 \varphi \cos^4 \varphi \\ &\quad - 12 \varepsilon^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi (1 - \cos^2 \varphi) \\ &= \sin^2 \varphi - \varepsilon (1 + \frac{5}{2} \varepsilon) \sin^2 2 \varphi + 16 \varepsilon^2 \sin^2 \varphi \cos^4 \varphi \\ &= \sin^2 \varphi - \varepsilon (1 + \frac{5}{2} \varepsilon) \sin^2 2 \varphi + \varepsilon^2 (\sin 3 \varphi + \sin \varphi)^2 \\ &= (1 + \varepsilon^2) \sin^2 \varphi - \varepsilon (1 + \frac{5}{2} \varepsilon) \sin^2 2 \varphi + \varepsilon^2 \sin^2 3 \varphi \\ &\quad + 2 \varepsilon^2 \sin \varphi \sin 3 \varphi \\ &= (1 + \varepsilon^2) \sin^2 \varphi - \varepsilon (1 + \frac{5}{2} \varepsilon) \sin^2 2 \varphi + \varepsilon^2 \sin^2 3 \varphi \\ &\quad + 8 \varepsilon^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi - 2 \varepsilon^2 \sin^2 \varphi \end{aligned}$$

$$\cos^2 \theta = (1 - \varepsilon^2) \sin^2 \varphi - \varepsilon \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right) \sin^2 2 \varphi + \varepsilon^2 \sin^2 3 \varphi. \quad (6)$$

Cherchons encore la valeur de  $\cos^4 \theta$ , en négligeant la deuxième puissance des  $\varepsilon$ . De (5) on tire

$$\begin{aligned} \cos^4 \theta &= \sin^4 \varphi - 8 \varepsilon \sin^4 \varphi \cos^2 \varphi \\ &= \sin^2 \varphi - \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi - 8 \varepsilon \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + 8 \varepsilon \sin^2 \varphi \cos^4 \varphi \\ &= \sin^2 \varphi - \frac{1}{4} \sin^2 2 \varphi - 2 \varepsilon \sin^2 2 \varphi + \frac{\varepsilon}{2} (\sin 3 \varphi + \sin \varphi)^2 \\ &= \sin^2 \varphi - \frac{1}{4} \sin^2 2 \varphi - 2 \varepsilon \sin^2 2 \varphi + \frac{\varepsilon}{2} \sin^2 3 \varphi + \frac{\varepsilon}{2} \sin^2 \varphi \\ &\quad + 4 \varepsilon \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi - \varepsilon \sin^2 \varphi \end{aligned} \quad (7)$$

$$\cos^4 \theta = \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) \sin^2 \varphi - \left(\frac{1}{4} + \varepsilon\right) \sin^2 2 \varphi + \frac{\varepsilon}{2} \sin^2 3 \varphi. \quad (8)$$

Enfin le calcul de  $\cos^6 \theta$ , en négligeant les termes de la première puissance de  $\varepsilon$ , donne, par le produit de (5) et (7),

$$\cos^6 \theta = \sin^6 \varphi = \sin^2 \varphi (1 - \cos^2 \varphi)^2 = \sin^2 \varphi - 2 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi \cos^4 \varphi$$

ou

$$\begin{aligned} \cos^6 \theta &= \sin^2 \varphi - \frac{1}{2} \sin^2 2 \varphi + \frac{1}{16} \sin^2 3 \varphi + \frac{1}{16} \sin^2 \varphi + \frac{1}{2} \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi - \frac{1}{8} \sin^2 \varphi, \\ \cos^6 \theta &= \frac{15}{16} \sin^2 \varphi - \frac{3}{8} \sin^2 2 \varphi + \frac{1}{16} \sin^2 3 \varphi. \end{aligned} \quad (9)$$

Les formules de transformation utilisées sont (6), (8) et (9).

## ANNEXE 6

Posons  $n=5$  dans la formule de récurrence [12] :

$$(n+1) X_{n+1} - (2n+1) \mu X_n + n X_{n-1} = 0 \text{ (')}.$$

Nous obtiendrons

$$6 X_6 = 11 \mu X_5 - 5 X_4. \quad (1)$$

Or,

$$X_4 = \frac{1}{8} (35 \mu^4 - 30 \mu^2 + 3),$$

$$X_5 = \frac{1}{8} (63 \mu^5 - 70 \mu^3 + 15 \mu).$$

On aura donc, tous calculs faits,

$$X_6 = \frac{1}{16} (231 \mu^6 - 315 \mu^4 + 105 \mu^2 - 5).$$

Si nous remplaçons dans (1),  $X_5$  par sa valeur, nous aurons

$$6 X_6 = \frac{11}{8} (63 \mu^6 - 70 \mu^4 + 15 \mu^2) - 5 X_4. \quad (1')$$

Mais

$$8 X_3^2 = 27 \mu^6 - 27 \mu^4 + 9 \mu^2 - 1$$

d'où l'on tire

$$\mu^6 = \frac{8}{27} X_3^2 + \mu^4 - \frac{\mu^2}{3} + \frac{1}{27}.$$

Portant cette valeur dans (1'), il viendra

$$6 X_6 = -\frac{77}{8} \mu^4 - \frac{33}{4} \mu^2 + \frac{77}{3} X_3^2 - 5 X_4.$$

---

(<sup>1</sup>)  $\mu = \cos \theta$ ,  $\theta$  étant la colatitude.



Or, l'expression de  $X_4$  nous donne

$$\mu^4 = \frac{8}{35} X_4 + \frac{6}{7} \mu^2 - \frac{3}{35}. \quad (1'')$$

Si on l'introduit dans la relation précédente, celle-ci devient

$$6 X_6 = -\frac{11}{5} X_6 - \frac{33}{2} \mu^2 + \frac{121}{30} + \frac{77}{3} X_3^2 - 5 X_4.$$

Comme

$$\mu^2 = \frac{2}{3} X_2 + \frac{1}{3}, \quad (1''')$$

nous aurons donc

$$6 X_6 = -\frac{36}{5} X_4 - 11 X_2 - \frac{22}{15} + \frac{77}{3} X_3^2;$$

d'où nous tirons finalement

$$X_3^2 = \frac{18}{77} X_6 + \frac{108}{385} X_4 + \frac{3}{7} X_2 + \frac{2}{35}.$$

Nous avons

$$X_2 X_4 = \frac{1}{16} (105 \mu^6 - 125 \mu^4 + 39 \mu^2 - 3),$$

d'où

$$\mu^6 = \frac{16}{105} X_2 X_4 + \frac{25}{21} \mu^4 - \frac{13}{35} \mu^2 + \frac{1}{35}.$$

Portons cette valeur dans (1'). Il viendra

$$6 X_6 = \frac{66}{5} X_2 X_4 + \frac{55}{8} \mu^4 - \frac{3 \times 77}{20} \mu^2 + \frac{99}{40} - 5 X_4,$$

ou encore, en tenant compte de (1''),

$$6 X_6 = \frac{66}{5} X_2 X_4 + \frac{11}{7} X_4 - \frac{11 \times 18}{35} \mu^2 + \frac{66}{35} - 5 X_4,$$

c'est-à-dire, en vertu de (1'''),

$$6 X_6 = \frac{66}{5} X_2 X_4 - \frac{24}{7} X_4 - \frac{11 \times 12}{35} X_2,$$

d'où nous tirons finalement

$$X_2 X_4 = \frac{5}{11} X_6 + \frac{20}{77} X_4 + \frac{2}{7} X_2.$$

ANNEXE 7

Il existe dans la Terre des forces internes non négligeables dont le jeu est la cause de phénomènes géologiques anciens ou récents, des tremblements de terre et des éruptions volcaniques. La Terre est en effet un corps qui n'est pas

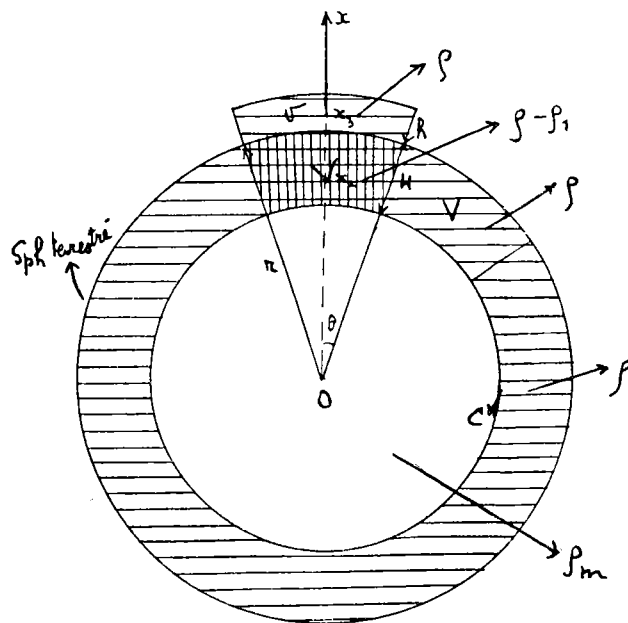


FIG. 2.

entièrement en équilibre. Des soulèvements importants se sont produits, d'autres de peu d'importance se produisent encore. Dans le problème du déplacement du centre d'inertie de la Terre, on considère principalement les déplacements de masses, tels que les apports fluviaux dans les océans, la fonte des glaciers polaires, phénomènes dus à des forces intérieures, les marées, phénomènes dus à des forces extérieures. Dès lors, il paraît intéressant d'évaluer l'importance du déplacement du centre de gravité de la Terre dû à un soulèvement éventuel.

TISSERAND avait déjà considéré la question [13] et avait conclu qu'il n'y avait pas lieu de s'en préoccuper. Pour le prouver, il citait l'exemple étudié par SCHIAPARELLI, où celui-ci suppose que le grand plateau central de l'Asie soit soulevé tout entier d'une centaine de mètres et trouve un déplacement du centre de gravité de la Terre de 1 mm seulement. Il donnait simplement ce résultat, se bornant à indiquer que la masse du plateau vaut approximativement  $10^{-5}$  fois la masse terrestre. Mais le raisonnement de SCHIAPARELLI n'est pas exact, car il suppose que le soulèvement envisagé ne modifie pas l'équilibre isostatique de la Terre, ce qui ne saurait être le cas.

Reprenons le problème sous une autre forme en tenant compte de la compensation isostatique régionale.

Supposons une terre sphérique (cas idéal) de rayon  $R$  et de densité moyenne constante. Son centre de gravité est en  $O$ . Si l'on choisit un système de coordonnées sphériques  $(r, \theta, \varphi)$  dont l'origine est en  $O$ , ses coordonnées sont toutes trois nulles. Considérons ensuite cette même terre sphérique et ajoutons-lui une calotte sphérique de hauteur radiale  $h$ . Le centre de gravité du nouvel ensemble sera déplacé sur l'axe des  $x$ , dans le sens des  $x$  positifs (fig. 2).

Faisons intervenir maintenant l'isostasie suivant l'idée d'HAYFORD, en introduisant une surface de compensation  $C$ . Prenons un bloc normal  $V$  et exprimons l'égalité des masses appliquées sur des bases « normales », c'est-à-dire égales, de la surface de compensation.

Soient maintenant

$\rho = 2,67$  la densité de la calotte de hauteur  $h$ ;

$\rho - \rho_1 = \rho_c = 0,6$  la densité de la couche de compensation, c'est-à-dire de la couronne sphérique de hauteur radiale  $H$ ;

$\rho_m = 5,52$  la densité moyenne de la Terre.

Nous avons,  $v$  désignant le volume de la calotte,

$$v \rho + V(\rho - \rho_1) = V \rho \quad \text{ou} \quad v \rho = V \rho_1. \quad (1)$$

En fait, la compensation isostatique est un artifice très commode et vérifié par l'expérience. Le problème actuel revient donc à chercher la position du centre de gravité (sur l'axe  $Ox$ ) des solides suivants : 1) la sphère de centre  $O$  et de rayon  $R - H$ , de densité  $\rho_m$ ; 2) la couronne sphérique de hauteur radiale  $H$ , de densité  $\rho$  (son centre de gravité est  $O$ ); 3) la calotte sphérique interne de hauteur radiale  $H$ , de volume  $V$  et de densité  $-\rho_1$  (la même calotte de densité  $\rho$  complète la couronne précédente); 4) la calotte sphérique externe de hauteur radiale  $h$  et de densité  $\rho$ .

Il est entendu que la hauteur  $h$  est au-dessus du niveau de la mer.  $\rho$  est la densité de l'écorce terrestre; lorsque celle-ci dépasse le niveau de la mer, pour que l'équilibre soit maintenu sur C, on suppose que la densité sous-jacente est moindre, soit  $\rho - \rho_1$ .

Le déplacement résultant du centre de gravité à partir de l'origine O aura pour valeur, en se reportant à la figure,

$$\xi = \frac{v \rho x_3 - V \rho_1 x_2}{\rho_m \cdot \text{Sphère}_{R-H} + \rho \cdot \text{Couronne}_H + v \rho - V \rho_1};$$

c'est-à-dire, d'après (1),

$$\xi = \frac{v \rho (x_3 - x_2)}{\rho_m \cdot \text{Sphère}_{R-H} + \rho \cdot \text{Couronne}_H}$$

ou, explicitement,

$$\xi = \frac{\frac{3}{4} \rho \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} [(R+h)^3 - R^3] \left\{ \frac{(R+h)^4 - R^4}{(R+h)^3 - R^3} - \frac{R^4 - (R-H)^4}{R^3 - (R-H)^3} \right\}}{\rho_m (R-H)^3 + \rho [R^3 - (R-H)^3]}.$$

Nous en tirons en première approximation largement suffisante

$$\xi = \frac{3}{8} \frac{\rho}{\rho_m} \sin^2 \theta \frac{h H}{R}.$$

La formule donnée sans démonstration par LAMBERT, qui s'est occupé du même problème, est [14, p. 163]

$$|\bar{x}| = \frac{3}{4} \frac{\rho}{\rho_m} \sin^2 \theta \frac{h d}{a},$$

où  $d=H$ ,  $a=R$ .

Le calcul pour  $h=4240$  m,  $H=113,7$  km,  $\theta=10^\circ$ , — données correspondant sensiblement à celles de SCHAPARELLI, —  $\rho=2,67$  et  $\rho_m=5,52$  donne, par notre formule,

$$\xi = 0^m 41.$$

Nous avons supposé, avec HAYFORD, une profondeur de compensation de 113,7 km, mais les théories plus récentes ont réduit cette profondeur au tiers. Donc le déplacement du centre d'inertie d'une terre sphérique en équilibre isostatique provenant de l'apport du gigantesque plateau du Thibet ne dépasserait pas 14 cm.

Si nous supposons maintenant un soulèvement de hauteur D de ce plateau, notre formule reste applicable, sauf à remplacer  $h$  par  $h+D$ . Pour  $D=100$  m, nous obtenons

$$\xi = 0^m 42.$$

Ceci nous donne une idée de la force extérieure — ou éventuellement intérieure — formidable qu'il faudrait supposer agir sur la Terre pour déplacer son centre de gravité d'une manière appréciable.

Dans l'hypothèse isostatique, il faudrait tenir compte de tout le relief superficiel et des fosses océaniques : il y aurait des déplacements du centre d'inertie de la Terre dans tous les sens et des compensations les réduiraient sans doute fortement. Ainsi qu'on vient de le voir, ceux mis en évidence sont extrêmement petits eu égard à la précision avec laquelle on détermine le géoïde, 7 m [2], et ce n'est pas le moindre intérêt de la méthode isostatique, comme l'écrit le P. LEJAY [9], de permettre d'éliminer l'influence des masses superficielles sans changer notablement la position du centre de la Terre.

Nous sommes donc fondé à conclure qu'en toute rigueur mathématique il y a un déplacement du centre d'inertie, mais que physiquement, au stade actuel de la technique gravimétrique, ce déplacement est négligeable. Ceci justifie en particulier l'application de la formule de STOKES, contre laquelle le géodésien LAMBERT élevait l'objection de la non-coïncidence des centres de gravité du géoïde et du sphéroïde de référence.

---

## RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- 
- [1] A. CLAIRAUT, *Théorie de la figure de la Terre, où il est traité de l'équilibre des fluides*. Paris, 1743; 2<sup>e</sup> éd., 1808, par Poisson.
- [2] G. G. STOKES, *On the variation of gravity at the surface of the Earth*. (Trans Camb. Phil. Soc., vol. 8, pp. 672-695, année 1849.)
- [3] M. DEHALU, *La gravimétrie et les anomalies de la pesanteur en Afrique orientale*. (Institut Roy. Col. Belge, 1943, sect. des Sc. techn., t. IV, fasc. 3.)
- [4] G. H. DARWIN, *The Theory of the Figure of the Earth carried to the second order of small quantities*. (Monthly Notices of R.A.S., vol. LX, 1899-1900.)
- [5] H. POINCARÉ, *Les mesures de gravité et la géodésie*. (Bull. Astr., vol. 18, 1901, pp. 27-30.)
- [6] J. DE GRAAF HUNTER, *The Figure of the Earth from gravity observations and the precision obtainable*. (Phil. Trans. of the R. S. of London, sér. A, n° 731, vol. 234, nov. 1934.)
- [7] A. ROSENBLATT et G. GARCIA, *Ac. des Sc. de Paris*, 31-XII-1937 et 19-IX-1938; *Revista de Ciencias*, Lima, déc. 1939, p. 527. -- A. ROSENBLATT, *ibidem*, sept. 1939, pp. 349-457.
- [8] BUCHI WALDT, *Géodésie statique*. Copenhague, 1922.
- [9] P. LEJAY, *Développements modernes de la Gravimétrie*. Paris, Gauthier-Villars, 1947, p. 96.
- [10] G. CASSINIS, *Sur l'adoption d'une formule internationale pour la pesanteur normale*. (Bull. géod., 1930, pp. 40-49.)
- [11] CATALAN, *Sur les fonctions  $X_n$  de Legendre*. (Mém. de l'Ac. roy. de Belgique, t. 31, 1885, pp. 59-60.)
- [12] OSSIAN BONNET, *Journal de Math. p. et ap.*, t. 17, année 1852, p. 267, ou JOS. BERTRAND, *Traité de calcul différentiel et intégral*, p. 358.
- [13] TISSERAND, *Mécanique céleste*, t. II.
- [14] W. D. LAMBERT, *The reduction of observed values of gravity to sea level*. (Bull. géod., 1930.)
-

## TABLE DES MATIÈRES

	Pages.
INTRODUCTION ... ..	5
I. — Équation du sphéroïde terrestre ... ..	9
II. — Formule générale de la géodésie dynamique ... ..	14
III. — Théorème de Stokes ... ..	19
IV. — Le problème inverse ... ..	26
V. — Le problème de l'intensité de la pesanteur normale... ..	32
VI. — Formule de Clairaut ... ..	34
VII. — Formule de l'intensité de la pesanteur normale au troisième ordre près ... ..	37
VIII. — Formule de l'intensité de la pesanteur normale au quatrième ordre près ... ..	44
Annexe 1 ... ..	54
Annexe 2 ... ..	56
Annexe 3 ... ..	58
Annexe 4 ... ..	60
Annexe 5 ... ..	62
Annexe 6 ... ..	65
Annexe 7 ... ..	67
RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES ... ..	71



**Tome IX.**

1. VAN WING, le R. P. J., *Etudes Bakongo. — II. Religion et Magie* (301 pages, 2 figures, 1 carte, 8 planches, 1938) . . . . . fr. 120 »
2. TIARKO FOURCHE, J. A. et MORLIGHEM, H., *Les communications des indigènes du Kasai avec les âmes des morts* (78 pages, 1939) . . . . . fr. 25 »
3. LOTAR, le R. P. L., *La grande Chronique du Bomu* (163 pages, 3 cartes, 1940). fr. 60 »
4. GELDERS, V., *Quelques aspects de l'évolution des Colonies en 1938* (82 pages, 1941) . . . . . fr. 35 »

**Tome X.**

1. VANHOVE, J., *Essai de droit coutumier du Ruanda* (Mémoire couronné au Concours annuel de 1940) (125 pages, 1 carte, 13 planches, 1941) . . . . . fr. 65 »
2. OLBRECHTS, F. M., *Bijdrage tot de kennis van de Chronologie der Afrikaansche plastiek* (38 blz., X pl., 1941) . . . . . fr. 30 »
3. DE BEAUCORPS, le R. P. R., *Les Basongo de la Luniungu et de la Gobari* (Mémoire couronné au Concours annuel de 1940) (172 p., 15 pl., 1 carte, 1941) . . . . . fr. 100 »
4. VAN DER KERKEN, G., *Le Méolithique et le Néolithique dans le bassin de l'Uele* (118 pages, 5 fig., 1942) . . . . . fr. 40 »
5. DE BOECK, le R. P. L.-B., *Premières applications de la Géographie linguistique aux langues bantoues* (219 pages, 75 figures, 1 carte hors-texte, 1942) . . . . . fr. 105 »

**Tome XI.**

1. MERTENS, le R. P. J., *Les chefs couronnés chez les Ba Kongo orientaux. Etude de régime successoral* (Mémoire couronné au Concours annuel de 1938) (455 pages, 8 planches, 1942) . . . . . fr. 200 »
2. GELDERS, V., *Le clan dans la Société indigène. Etude de politique sociale, belge et comparée* (72 pages, 1943) . . . . . fr. 25 »
3. SOHIER, A., *Le mariage en droit coutumier congolais* (248 pages, 1943). . . . . fr. 100 »

**Tome XII.**

1. LAUDE, N., *La Compagnie d'Ostende et son activité coloniale au Bengale* (260 pages, 7 planches et 1 carte hors-texte, 1944) . . . . . fr. 110 »
2. WAUTERS, A., *La nouvelle politique coloniale* (108 pages, 1945) . . . . . fr. 65 »
3. JENTGEN, J., *Etudes sur le droit cambiaire préliminaires à l'introduction au Congo belge d'une législation relative au chèque. — 1<sup>re</sup> partie : Définition et nature juridique du chèque envisagé dans le cadre de la Loi uniforme issue de la Conférence de Genève de 1931* (200 pages, 1945) . . . . . fr. 85 »

**Tome XIII.**

- VAN DER KERKEN, G., *L'Ethnie Mongo :*
1. Vol. I. Première partie : *Histoire, groupements et sous-groupements, origines.* Livre I (XII-504 pages, 1 carte, 3 croquis hors-texte, 1944) . . . . . fr. 200 »
  2. Vol. I. Première partie. Livres II et III (X-639 pages, 1 carte, 3 croquis et 64 planches hors-texte, 1944) . . . . . fr. 400 »

**Tome XIV.**

1. LOTAR, le R.P. L., *La Grande Chronique de l'Uele* (363 pages, 4 cartes, 4 planches hors-texte, 1946) . . . . . fr. 200 »
2. DE CLEENE, N., *Le Clan matrilineal dans la société indigène. Hier, Aujourd'hui, Demain* (100 pages, 1946) . . . . . fr. 60 »
3. MOTTOULLE, le D<sup>r</sup> L., *Politique sociale de l'Union Minière du Haut-Katanga pour sa main-d'œuvre indigène et ses résultats au cours de vingt années d'application* (68 pages, 1946) . . . . . fr. 50 »
4. JENTGEN, P., *Les Pouvoirs des Secrétaires Généraux ff. du Ministère des Colonies pendant l'occupation.* (Loi du 10 mai 1940) (82 pages, 1946) . . . . . fr. 45 »

**Tome XV.**

1. HEYSE, TH., *Grandes lignes du Régime des terres du Congo belge et du Ruanda-Urundi et leurs applications (1940-1946)* (191 pages, 1947) . . . . . fr. 110 »
2. MALENGREAU, G., *Les droits fonciers coutumiers chez les indigènes du Congo belge. Essai d'interprétation juridique* (260 pages, 1947) . . . . . fr. 150 »
3. HEYSE, TH., *Associations religieuses au Congo belge et au Ruanda-Urundi* (158 pages, 1948) . . . . . fr. 100 »
4. LAMAL, le R. P. F., *Essai d'étude démographique d'une population du Kwango. Les Basuku du Territoire de Feshi* (189 pages, 2 figures, 10 graphiques, 1 carte, 8 planches, 1949) . . . . . fr. 165 »

**Tome XVI.**

- VAN BULCK, le R.P. G., *Les Recherches linguistiques au Congo belge* (767 pages, 1 carte hors-texte, 1948) . . . . . fr. 350 »



**Tome XVII.**

1. DE BOECK, le R. P. L.-B., *Taalkunde en de Talenkwestie in Belgisch-Kongo* (94 pages, 1949) . . . . . fr. 80 »
2. LOUWERS, O., *Le Congrès Volta de 1938 et ses travaux sur l'Afrique* (113 pages, 1949) . . . . . fr. 100 »
3. VAN BULCK, le R. P. G., *Manuel de Linguistique Bantoue* (323 pages, 1 carte hors-texte, 1949) . . . . . fr. 260 »

**Tome XVIII.**

1. VANNESTE, le R.P. M., *Legenden, Geschiedenis en Gebruiken van een Nilotisch Volk. — Alur teksten* (Mahagi, Belgisch-Kongo) 202 bl., 1949 . . . . . fr. 155 »
2. ANCIAUX, L., *Le problème musulman dans l'Afrique belge* (81 pages, 8 planches, 1949) . . . . . fr. 70 »
3. CARRINGTON, J. F., *A comparative study of some central african group-languages* (119 pages, 4 planches hors-texte, 1949) . . . . . fr. 130 »
4. STAPPERS, le R. P. L., *Tonologische bijdrage tot de studie van het werkwoord in het Tshiluba* (Met medewerking van E. P. E. WILLEMS) 163 pages, 1949 . . . . . fr. 185 »

**Tome XIX.**

1. DE JONGHE, E., *Les formes d'asservissement dans les sociétés indigènes du Congo belge* (avec la collaboration de J. VANHOVE) 484 pages, 1 carte hors-texte, 1949 . . . . . fr. 140 »
2. MALENGREAU, G., *Vers un paysan nat indigène. Les falissements agricoles au Congo belge* (92 pages, 5 planches hors-texte, 1949) . . . . . fr. 85 »

**SECTION DES SCIENCES NATURELLES ET MEDICALES**

**Tome I.**

1. ROBYNS, W., *La colonisation végétale des laves récentes du volcan Rumoka (laves de Kateruzi)* (33 pages, 10 planches, 1 carte, 1932) . . . . . fr. 30 »
2. DUBOIS, le Dr A., *La lèpre dans la région de Wamba-Pawa (Uele-Nepoko)* (87 pages, 1932) . . . . . fr. 25 »
3. LEPLAE, E., *La crise agricole coloniale et les phases du développement de l'agriculture dans le Congo central* (31 pages, 1932) . . . . . fr. 10 »
4. DE WILDEMAN, E., *Le port suffrutescens de certains végétaux tropicaux dépend de facteurs de l'ambiance!* (51 pages, 2 planches, 1933) . . . . . fr. 20 »
5. ADRIAENS, L., CASTAGNE, E. et VLASSOV, S., *Contribution à l'étude histologique et chimique du Sterculia Bequaerti De Wild.* (112 p., 2 pl., 28 fig., 1933) . . . . . fr. 50 »
6. VAN NITSEN, le Dr R., *L'hygiène des travailleurs noirs dans les camps industriels du Haut-Katanga* (248 pages, 4 planches, carte et diagrammes, 1933) . . . . . fr. 135 »
7. STEYAERT, R. et VRYDAGH, J., *Etude sur une maladie grave du cotonnier provoquée par les piqures d'Helopeltis* (55 pages, 32 figures, 1933) . . . . . fr. 40 »
5. DELEVOY, G., *Contribution à l'étude de la végétation forestière de la vallée de la Lukuga (Katanga septentrional)* (124 p., 5 pl., 2 diagr., 1 carte, 1933) . . . . . fr. 80 »

**Tome II.**

1. HAUMAN, L., *Les Lobelia géants des montagnes du Congo belge* (52 pages, 6 figures, 7 planches, 1934) . . . . . fr. 30 »
2. DE WILDEMAN, E., *Remarques à propos de la forêt équatoriale congolaise* (120 p., 3 cartes hors-texte, 1934) . . . . . fr. 50 »
3. HENRY, J., *Etude géologique et recherches minières dans la contrée située entre Ponthierville et le lac Kivu* (51 pages, 6 figures, 3 planches, 1934) . . . . . fr. 35 »
4. DE WILDEMAN, E., *Documents pour l'étude de l'alimentation végétale de l'indigène du Congo belge* (264 pages, 1934) . . . . . fr. 70 »
5. POLINARD, E., *Constitution géologique de l'Entre-Lulua-Bushimate, du 7<sup>e</sup> au 8<sup>e</sup> parallèle* (74 pages, 6 planches, 2 cartes, 1934) . . . . . fr. 45 »

**Tome III.**

1. LEBRUN, J., *Les espèces congolaises du genre Ficus L.* (79 p., 1 fig., 1934) . . . . . fr. 24 »
2. SCHWEITZ, le Dr J., *Contribution à l'étude endémiologique de la malaria dans la forêt et dans la savane du Congo oriental* (45 pages, 1 carte, 1934) . . . . . fr. 20 »
3. DE WILDEMAN, E., TROLLI, GREGOIRE et OROLOVITCH, *A propos de médicaments indigènes congolais* (127 pages, 1935) . . . . . fr. 35 »
4. DELEVOY, G. et ROBERT, M., *Le milieu physique du Centre africain méridional et la phytogéographie* (104 pages, 2 cartes, 1935) . . . . . fr. 35 »
5. LEPLAE, E., *Les plantations de café au Congo belge. — Leur histoire (1881-1935). — Leur importance actuelle* (248 pages, 12 planches, 1936) . . . . . fr. 80 »

#### Tome IV.

1. JADIN, le Dr J., *Les groupes sanguins des Pygmées* (Mémoire couronné au Concours annuel de 1935) (26 pages, 1935) . . . . . fr. 15 »
2. JULIEN, le Dr P., *Bloedgroeponderzoek der Efé-pygmeeen en der omwonende Negerstammen* (Verhandeling welke in den jaarlijksen Wedstrijd voor 1935 een eervolle vermelding verwierf) (32 bl., 1935) . . . . . fr. 15 »
3. VLASSOV, S., *Espèces alimentaires du genre Artocarpus. — 1. L'Artocarpus integrifolia L. ou le Jacquier* (80 pages, 10 planches, 1936) . . . . . fr. 35 »
4. DE WILDEMAN, E., *Remarques à propos de formes du genre Uragoga L. (Rubiacees). — Afrique occidentale et centrale* (188 pages, 1936) . . . . . fr. 60 »
5. DE WILDEMAN, E., *Contributions à l'étude des espèces du genre Uapaga BAILL. (Euphorbiacées)* (192 pages, 43 figures, 5 planches, 1936) . . . . . fr. 70 »

#### Tome V.

1. DE WILDEMAN, E., *Sur la distribution des saponines dans le règne végétal* (94 pages, 1936) . . . . . fr. 35 »
2. ZAHLBRUCKNER, A. et HAUMAN, L., *Les lichens des hautes altitudes au Ruwenzori* (31 pages, 5 planches, 1936) . . . . . fr. 20 »
3. DE WILDEMAN, E., *A propos de plantes contre la lèpre (Crinum sp. Amaryllidacées)* (58 pages, 1937) . . . . . fr. 20 »
4. HISSETTE, le Dr J., *Onchocercose oculaire* (120 pages, 5 planches, 1937) . . . . . fr. 50 »
5. DUREN, le Dr A., *Un essai d'étude d'ensemble du paludisme au Congo belge* (86 pages, 4 figures, 2 planches, 1937) . . . . . fr. 35 »
6. STANER, P. et BOUTIQUE, R., *Matériaux pour les plantes médicinales indigènes du Congo belge* (228 pages, 17 figures, 1937) . . . . . fr. 80 »

#### Tome VI.

1. BURGEON, L., *Liste des Coléoptères récoltés au cours de la mission belge au Ruwenzori* (140 pages, 1937) . . . . . fr. 50 »
2. LEPERSONNE, J., *Les terrasses du fleuve Congo au Stanley-Pool et leurs relations avec celles d'autres régions de la cuvette congolaise* (68 p., 6 fig., 1937) . . . . . fr. 25 »
3. CASTAGNE, E., *Contribution à l'étude chimique des légumineuses insecticides du Congo belge* (Mémoire couronné au Concours annuel de 1937) (102 pages, 2 figures, 9 planches, 1938) . . . . . fr. 90 »
4. DE WILDEMAN, E., *Sur des plantes médicinales ou utiles du Mayumbe (Congo belge), d'après des notes du R. P. Wellens † (1891-1924)* (97 pages, 1938) . . . . . fr. 35 »
5. ADRIAENS, L., *Le Ricin au Congo belge. — Étude chimique des graines, des huiles et des sous-produits* (206 pages, 11 diagrammes, 12 planches, 1 carte, 1938) . . . . . fr. 120 »

#### Tome VII.

1. SCHWETZ, le Dr J., *Recherches sur le paludisme endémique du Bas-Congo et du Kwango* (164 pages, 1 croquis, 1938) . . . . . fr. 60 »
2. DE WILDEMAN, E., *Dioscorea alimentaires et toxiques* (morphologie et biologie) (262 pages, 1938) . . . . . fr. 90 »
3. LEPLAE, E., *Le palmier à huile en Afrique, son exploitation au Congo belge et en Extrême-Orient* (108 pages, 11 planches, 1939) . . . . . fr. 60 »

#### Tome VIII.

1. MICHOT, P., *Étude pétrographique et géologique du Ruwenzori septentrional* (271 pages, 17 figures, 48 planches, 2 cartes, 1938) . . . . . fr. 170 »
2. BOUCKAERT, J., CASIER, H., et JADIN, J., *Contribution à l'étude du métabolisme du calcium et du phosphore chez les indigènes de l'Afrique centrale* (Mémoire couronné au Concours annuel de 1938) (25 pages, 1938) . . . . . fr. 15 »
3. VAN DEN BERGHE, L., *Les schistosomes et les schistosomoses au Congo belge et dans les territoires du Ruanda-Urundi* (Mémoire couronné au Concours annuel de 1939) (154 pages, 14 figures, 27 planches, 1939) . . . . . fr. 90 »
4. ADRIAENS, L., *Contribution à l'étude chimique de quelques gommes du Congo belge* (100 pages, 9 figures, 1939) . . . . . fr. 45 »

**Tome IX.**

1. POLINARD, E., *La bordure nord du socle granitique dans la région de la Lubé et de la Bushimaie* (56 pages, 2 figures, 4 planches, 1939) . . . . . fr. 35 »
2. VAN RIEL, le Dr J., *Le Service médical de la Compagnie Minière des Grands Lacs Africains et la situation sanitaire de la main-d'œuvre* (58 pages, 5 planches, 1 carte, 1939) . . . . . fr. 30 »
3. DE WILDEMAN, E., Drs TROLLI, DRICOT, TESSITORE et M. MORTIAUX, *Notes sur des plantes médicinales et alimentaires du Congo belge* (Missions du « Foréami ») (VI-356 pages, 1939) . . . . . fr. 120 »
4. POLINARD, E., *Les roches alcalines de Chitanga (Angola) et les tufs associés* (32 pages, 2 figures, 3 planches, 1939) . . . . . fr. 25 »
5. ROBERT, M., *Contribution à la morphologie du Katanga; les cycles géographiques et les pénéplaines* (59 pages, 1939) . . . . . fr. 20 »

**Tome X.**

1. DE WILDEMAN, E., *De l'origine de certains éléments de la flore du Congo belge et des transformations de cette flore sous l'action de facteurs physiques et biologiques* (365 pages, 1940) . . . . . fr. 120 »
2. DUBOIS, le Dr A., *La lèpre au Congo belge en 1938* (60 pages, 1 carte, 1940) . fr. 25 »
3. JADIN, le Dr J., *Les groupes sanguins des Pygmoides et des nègres de la province équatoriale (Congo belge)* (42 pages, 1 diagramme, 3 cartes, 2 pl., 1940) . . fr. 20 »
4. POLINARD, E., *Het doleriet van den samenloop Sankuru-Bushimat* (42 pages, 3 figures, 1 carte, 5 planches, 1941) . . . . . fr. 35 »
5. BURGEON, L., *Les Colasposoma et les Euryope du Congo belge* (43 pages, 7 figures, 1941) . . . . . fr. 20 »
6. PASSAU, G., *Découverte d'un Céphalopode et d'autres traces fossiles dans les terrains anciens de la Province orientale* (14 pages, 2 planches, 1941) . . fr. 15 »

**Tome XI.**

1. VAN NITSEN, le Dr R., *Contribution à l'étude de l'enfance noire au Congo belge* (82 pages, 2 diagrammes, 1941) . . . . . fr. 35 »
2. SCHWEITZ, le Dr J., *Recherches sur le Paludisme dans les villages et les camps de la division de Mongwalu des Mines d'or de Kilo (Congo belge)* (75 pages, 1 croquis, 1941) . . . . . fr. 35 »
3. LEBRUN, J., *Recherches morphologiques et systématiques sur les cafétiers du Congo* (Mémoire couronné au Concours annuel de 1937) (184 p., 19 pl., 1941) . . fr. 160 »
4. RODHAIN, le Dr J., *Étude d'une souche de Trypanosoma Cazalboui (Vivax)* (38 pages, 1941) . . . . . fr. 20 »
5. VAN DEN ABEELE, M., *L'Erosion. Problème africain* (30 pages, 2 planches, 1941) . fr. 15 »
6. STANER, P., *Les Maladies de l'Hevea au Congo belge* (42 p., 4 pl., 1941) . . fr. 20 »
7. RESSELER, R., *Recherches sur la calcémie chez les indigènes de l'Afrique centrale* (54 pages, 1941) . . . . . fr. 30 »
8. VAN DEN BRANDEN, le Dr J.-F., *Le contrôle biologique des Néarsphénamines (Néosalvarsan et produits similaires)* (71 pages, 5 planches, 1942) . . fr. 35 »
9. VAN DEN BRANDEN, le Dr J.-F., *Le contrôle biologique des Glyphénarstines (Tryparsamide, Tryponarsyl, Novatoryl, Trypotane)* (75 pages, 1942) . . . fr. 35 »

**Tome XII.**

1. DE WILDEMAN, E., *Le Congo belge possède-t-il des ressources en matières premières pour de la pâte à papier?* (IV-156 pages, 1942) . . . . . fr. 60 »
2. BASTIN, R., *La biochimie des moisissures (Vue d'ensemble. Application à des souches congolaises d'Aspergillus du groupe « Niger » THOM. et CHURCH.)* (125 pages, 2 diagrammes, 1942) . . . . . fr. 60 »
3. ADRIAENS, L. et WAGEMANS, G., *Contribution à l'étude chimique des sols salins et de leur végétation au Ruanda-Urundi* (186 pages, 1 figure, 7 pl., 1943) . . . fr. 80 »
4. DE WILDEMAN, E., *Les latex des Euphorbiacées. 1. Considérations générales* (68 pages, 1944) . . . . . fr. 35 »

**Tome XIII.**

1. VAN NITSEN, R., *Le pian* (128 pages, 6 planches, 1944) . . . . . fr. 60 »
2. FALLON, F., *L'éléphant africain* (51 pages, 7 planches, 1944) . . . . . fr. 35 »
3. DE WILDEMAN, E., *A propos de médicaments antilépreux d'origine végétale. II. Les plantes utiles des genres Aconitum et Hydrocotyle* (86 pages, 1944) . . . . . fr. 40 »
4. ADRIAENS, L., *Contribution à l'étude de la toxicité du manioc au Congo belge* (mémoire qui a obtenu une mention honorable au concours annuel de 1940) (140 pages, 1945) . . . . . fr. 80 »
5. DE WILDEMAN, E., *A propos de médicaments antilépreux d'origine végétale. III. Les plantes utiles du genre Strychnos* (105 pages, 1946) . . . . . fr. 65 »

**Tome XIV.**

1. SCHWETZ, le Dr J., *Recherches sur les Moustiques dans la Bordure orientale du Congo belge (lac Kivu-lac Albert)* (94 pages, 1 carte hors-texte, 6 croquis, 7 photographies, 1944) . . . . . fr. 50 »
2. SCHWETZ, le Dr J. et DARTEVELLE, E., *Recherches sur les Mollusques de la Bordure orientale du Congo et sur la Bilharziose intestinale de la plaine de Kasenyi, lac Albert* (77 pages, 1 carte hors-texte, 7 planches, 1944) . . . . . fr. 40 »
3. SCHWETZ, le Dr J., *Recherches sur le paludisme dans la bordure orientale du Congo belge* (216 pages, 1 carte, 8 croquis et photographies, 1944) . . . . . fr. 105 »
4. SCHWETZ, le Dr J. et DARTEVELLE, E., *Contribution à l'étude de la faune malacologique des grands lacs africains (1<sup>re</sup> étude: Les lacs Albert, Edouard et Kivu)* (48 pages, 1 planche et 1 tableau hors-texte, 1947) . . . . . fr. 45 »
5. DARTEVELLE, E. et SCHWETZ, le Dr J., *Contribution à l'étude de la faune malacologique des grands lacs africains (2<sup>e</sup> étude: Le lac Tanganika)* (126 pages, 1 carte, 6 planches hors-texte, 1947) . . . . . fr. 120 »
6. DARTEVELLE, E. et SCHWETZ, le Dr J., *Contribution à l'étude de la faune malacologique des grands lacs africains (3<sup>e</sup> étude: Sur la faune malacologique du lac Moero)* (90 pages, 3 cartes, 4 planches, 1 photo, 1947) . . . . . fr. 100 »

**Tome XV.**

1. ADRIAENS, L., *Recherches sur la composition chimique des flacourtiacées à huile chaulmoogrique du Congo belge* (87 pages, 1946) . . . . . fr. 60 »
2. RESSELER, R., *Het droog-bewaren van microbiologische wezens en hun reactie-producten. De droogtechniek* (63 blz., 1946) . . . . . fr. 40 »
3. DE WILDEMAN, E., J. Gillet, S. J., et le Jardin d'essais de Kisantu (120 pages, 2 planches, 1946) . . . . . fr. 75 »
4. DE WILDEMAN, E., *A propos de médicaments antilépreux d'origine végétale. IV. Des Strophantus et de leur utilisation en médecine* (70 pages, 1946) . . . . . fr. 45 »
5. DUREN, A., *Les serpents venimeux au Congo belge* (45 pages, 5 planches, 1946) . . . . . fr. 50 »
6. PASSAU, G., *Gisements sous basalte au Kivu (Congo belge)* (24 pages, 2 croquis, 2 planches hors-texte, 1946) . . . . . fr. 30 »
7. DUBOIS, le Dr A., *Chimiothérapie des Trypanosomiasés* (169 pages, 1946) . . . . . fr. 100 »

**Tome XVI.**

1. POLINARD, E., *Le minerai de manganèse à polianite et hollandite de la haute Lulua* (41 pages, 5 figures, 4 planches hors-texte, 1946) . . . . . fr. 50 »
2. SCHWETZ, le Dr J., *Sur la classification et la nomenclature des Planorbidae (Planorbinae et Bulninae) de l'Afrique centrale et surtout du Congo belge* (91 pages, 1947) . . . . . fr. 60 »
3. FRASELLE, E., *Introduction à l'étude de l'atmosphère congolaise. La prévision du temps à longue échéance en Afrique équatoriale* (54 pages, 1947) . . . . . fr. 35 »
4. POLINARD, E., *Cristaux de cassitérite du Kivu méridional et du Mantema* (25 pages, 2 planches hors-texte) . . . . . fr. 35 »
5. DE WILDEMAN, E., *A propos de médicaments antilépreux d'origine végétale. VII. Sur des espèces du genre Eucalyptus L'HÉRITIER* (en collaboration avec L. PYNART) (123 pages, 1947) . . . . . fr. 70 »
6. DE WILDEMAN, E., *A propos de médicaments antilépreux d'origine végétale. VIII. Sur des espèces du genre Acacia L.* (en collaboration avec L. PYNART) (77 pages, 1947) . . . . . fr. 50 »
7. DARTEVELLE, E. et SCHWETZ, le Dr J., *Sur l'origine des mollusques thalassoides du lac Tanganika* (58 pages, 1947) . . . . . fr. 45 »
8. DE WILDEMAN, E., *A propos de médicaments antilépreux d'origine végétale. IX. Sur des espèces du genre Capsicum L.* (56 pages, 1947) . . . . . fr. 40 »

**Tome XVII.**

1. SCHWEITZ, le Dr J., <i>Recherches sur le Paludisme endémique et le Paludisme épidermique dans le Ruanda-Urundi</i> (143 pages, 1 carte, 1948) . . . . . fr.	90 »
2. POLINARD, E., <i>Considérations sur le système du Kahlari et ses dérives, au Sud du Congo belge, entre le Kuango et le Katanga</i> (56 pages, 3 planches hors-texte, 1948) . . . . . fr.	55 »
3. DE WILDEMAN, E., <i>A propos de médicaments antilépreux d'origine végétale. X. Quelques espèces des genres Albizzia D'URAZZ. et Cassia L.</i> (57 pages) . . . . . fr.	45 »
4. DE WILDEMAN, E., <i>A propos de médicaments antilépreux d'origine végétale. XII. Sur des représentants des genres Dalbergia, Dichrostachys, Dolichos, Flemingia, Loesenera, Lonchocarpus, Mimosa, Parkia, Pentaclethra, Phaseolus, Pongamia, Psoralea, Pterocarpus, Tamarindus, de la famille des Légumineuses</i> (en collaboration avec L. PYNÆERT, 111 pages, 1948) . . . . . fr.	75 »
5. DE WILDEMAN, E., <i>A propos de médicaments antilépreux d'origine végétale. XIII. Sur des espèces des genres Nerium, Aspidospermum (Ipocynacées), Clematis, Lawsonia, Melia, Nymphaea, Plumbago, Smilax, Terminalia, Trichilia, Viola</i> (en collaboration avec L. PYNÆERT, 100 pages, 1948) . . . . . fr.	70 »

**Tome XVIII.**

1. DE WILDEMAN, E., <i>A propos de médicaments antilépreux d'origine végétale. XIV. Sur des représentants des genres : Alangium, Anacardium, Scaevola, Boerhaavia, Brucea, Bryophyllum, Calotropis, Carpolobia, Commiphora, Diospyros, Dipterocarpus, Galophyllum, Glusia, Symphonia, Lophira, Parinari</i> (en collaboration avec L. PYNÆERT) 93 pages, 1949 . . . . . fr.	60 »
2. DE WILDEMAN, E., <i>A propos de médicaments antilépreux d'origine végétale. XV. Sur des espèces des genres : Adenia, Anagallis, Cedrus, Celastrum, Cyathula, Dieffenbachia, Bambusa, Eleusine, Itead, Leonotis, Muntingia, Hibiscus, Phytolacca, Pseuderanthemum, Rizobolobolus, Suriga et Treculia</i> (en collaboration avec L. PYNÆERT) 59 pages, 1949 . . . . . fr.	45 »
3. MEULENBEEK, J., <i>Introduction à l'Étude pédologique des sols du Territoire du Bas-Fleuve Congo belge</i> , en collaboration avec L. DE LEMBERG et G. WALGEMANS (133 pages, 25 planches et 6 cartes hors-texte, 1949) . . . . . fr.	350 »

**SECTION DES SCIENCES TECHNIQUES**

**Tome I.**

1. FONTAINAS, P., <i>La force motrice pour les petites entreprises coloniales</i> (188 pages, 1935) . . . . . fr.	40 »
2. HELLINCKX, L., <i>Études sur le Copal-Congo</i> (Mémoire couronné au Concours annuel de 1935) (64 pages, 7 figures, 1935) . . . . . fr.	25 »
3. DEVROEY, E., <i>Le problème de la Lukuga, exutoire du lac Tanganyika</i> (130 pages, 14 figures, 1 planche, 1938) . . . . . fr.	60 »
4. FONTAINAS, P., <i>Les exploitations minières de haute montagne au Ruanda-Urundi</i> (59 pages, 31 figures, 1938) . . . . . fr.	40 »
5. DEVROEY, E., <i>Installations sanitaires et épuration des eaux résiduaires au Congo belge</i> (56 pages, 13 figures, 3 planches, 1939) . . . . . fr.	40 »
6. DEVROEY, E., et VANDERINDEX, R., <i>Le lac Kivu</i> (76 pages, 51 figures, 1939) . . . . . fr.	60 »

**Tome II.**

1. DEVROEY, E., <i>Le réseau routier au Congo belge et au Ruanda-Urundi</i> (218 pages, 62 figures, 2 cartes, 1939) . . . . . fr.	130 »
2. DEVROEY, E., <i>Habitatons coloniaux et conditionnement d'air sous les tropiques</i> (228 pages, 94 figures, 33 planches, 1940) . . . . . fr.	200 »
3. LEGRAYE, M., <i>Grands traits de la Géologie et de la Minéralisation aurifère des régions de Kilo et de Moto (Congo belge)</i> (135 pages, 25 figures, 13 planches, 1940) . . . . . fr.	70 »

**Tome III.**

1. SPONCK, R., <i>Mesures hydrographiques effectuées dans la région dérivante du bief maritime du fleuve Congo. Observation des mouvements des alluvions. Essai de détermination des débits solides</i> (56 pages, 1941) . . . . . fr.	35 »
2. BETTE, R., <i>Aménagement hydro-électrique complet de la Lufira à « Chutes Cornet » par régularisation de la rivière</i> (33 pages, 19 planches, 1941) . . . . . fr.	60 »
3. DEVROEY, E., <i>Le bassin hydrographique congolais, spécialement celui du bief maritime</i> (172 pages, 6 planches, 4 cartes, 1941) . . . . . fr.	100 »
4. DEVROEY, E., (avec la collaboration de DE BACKER, E.), <i>La réglementation sur les constructions au Congo belge</i> (296 pages, 1942) . . . . . fr.	90 »

**Tome IV.**

1. DEVROEY, E., *Le béton précontraint aux Colonies. (Présentation d'un projet de pont démontable en éléments de série préfabriqués)* (48 pages, 9 planches hors-texte, 1944) . . . . . fr. 30 »
2. ALGRAIN, P., *Monographie des Matériels Algrain* (148 pages, 92 figures, 25 planches, 4 diagrammes et 3 tableaux hors-texte, 1944) . . . . . fr. 130 »
3. ROGER, E., *La pratique du traitement électrochimique des minerais de cuivre du Katanga* (68 pages, 10 planches, 1946) . . . . . fr. 70 »
4. VAN DE PUTTE, M., *Le Congo belge et la politique de conjoncture* (129 pages, 9 diagrammes, 1946) . . . . . fr. 80 »
5. DEVROEY, E., *Nouveaux systèmes de ponts métalliques pour les Colonies et leur influence possible sur l'évolution des transports routiers au Congo belge et au Ruanda-Urundi* (97 pages, 12 figures, 12 planches hors-texte, 1947) . fr. 100 »

**Tome V.**

1. DEVROEY, E., *Observations hydrographiques du bassin congolais, 1932-1947* (163 pages, 1 planche hors-texte, 1948) . . . . . fr. 140 »
2. DEVROEY, E., *Une mission d'information hydrographique aux Etats-Unis pour le Congo belge* (72 pages, 8 planches et 2 cartes hors-texte, 1949) . . . . . fr. 90 »
3. DEVROEY, E., *A propos de la stabilisation du niveau du lac Tanganika et de l'amélioration de la navigabilité du fleuve Congo (Bief moyen du Lualaba Kindu-Ponthierville)* (135 pages, 6 planches hors-texte, 1949) . . . . . fr. 205 »
4. DEVROEY, E., *Réflexions sur les transports congolais à la lumière d'une expérience américaine* (96 pages, 1949) . . . . . fr. 85 »

**COLLECTION IN-4°**

**SECTION DES SCIENCES MORALES ET POLITIQUES**

**Tome I.**

- SCHNEBESTA, le R. P. P., *Die Bambuti-Pygmäen vom Ituri* (1 frontispice, XVIII-440 pages, 16 figures, 11 diagrammes, 32 planches, 1 carte, 1938) . . . . . fr. 500 »

**Tome II.**

1. SCHEBESTA, le R. P. P., *Die Bambuti-Pygmäen vom Ituri* (XII-284 pages, 189 figures, 5 diagrammes, 25 planches, 1941) . . . . . fr. 270 »
2. SCHEBESTA, le R. P. P., *Die Bambuti-Pygmäen vom Ituri* (IX-266 pages, 12 planches hors-texte, 1948) . . . . . fr. 340 »

**Tome III.**

- SCHUMACHER, le Dr P., I. *Die physische und soziale Umwelt der Kivu-Pygmäen (Twiiden)* (X-509 pages, 30 planches hors-texte, 1949) . . . . . fr. 700 »

**SECTION DES SCIENCES NATURELLES ET MEDICALES**

**Tome I.**

1. ROBYS, W., *Les espèces congolaises du genre Digitaria Hall* (52 pages, 6 planches, 1931) . . . . . fr. 40 »
2. VANDERYST, le R. P. H., *Les roches oolithiques du système schisto-calcaireux dans le Congo occidental* (70 pages, 10 figures, 1932) . . . . . fr. 40 »
3. VANDERYST, le R. P. H., *Introduction à la phytogéographie agrostologique de la province Congo-Kasai. (Les formations et associations)* (154 pages, 1932) . fr. 65 »
4. SCAËTTA, H., *Les famines périodiques dans le Ruanda. — Contribution à l'étude des aspects biologiques du phénomène* (42 pages, 1 carte, 12 diagrammes, 10 planches, 1932) . . . . . fr. 50 »
5. FONTAINAS, P. et ANSOTTE, M., *Perspectives minières de la région comprise entre le Nil, le lac Victoria et la frontière orientale du Congo belge* (27 pages, 2 cartes, 1932) . . . . . fr. 20 »
6. ROBYS, W., *Les espèces congolaises du genre Panicum L.* (80 pages, 5 planches, 1932) . . . . . fr. 50 »
7. VANDERYST, le R. P. H., *Introduction générale à l'étude agronomique du Haut-Kasai. Les domaines, districts, régions et sous-régions géo-agronomiques du Vicariat apostolique du Haut-Kasai* (82 pages, 12 figures 1933) . . . . . fr. 50 »

**Tome II.**

1. THOREAU, J., et DU TRIEU DE TERDONCK, R., *Le gîte d'uranium de Shtnkolobwe-Kasolo (Katanga)* (70 pages, 17 planches, 1933) . . . . . fr. 100 »
2. SCAËTTA, H., *Les précipitations dans le bassin du Kivu et dans les zones limitrophes du fossé tectonique (Afrique centrale équatoriale). — Communication préliminaire* (108 pages, 28 figures, cartes, plans et croquis, 16 diagrammes, 10 planches, 1933) . . . . . fr. 120 »
3. VANDERYST le R. P. H., *L'élevage extensif du gros bétail par les Bampombos et Baholos du Congo portugais* (50 pages, 5 figures, 1933) . . . . . fr. 30 »
4. POLINARD, E., *Le socle ancien inférieur à la série schisto-calcaire du Bas-Congo. Son étude le long du chemin de fer de Matadi à Léopoldville* (116 pages, 7 figures, 8 planches, 1 carte, 1934) . . . . . fr. 90 »

**Tome III.**

- SCAËTTA, H., *Le climat écologique de la dorsale Congo-Nil* (335 pages, 61 diagrammes, 20 planches, 1 carte, 1934) . . . . . fr. 200 »

**Tome IV.**

1. POLINARD, E., *La géographie physique de la région du Lubilash, de la Bushimate et de la Lubi vers le 6° parallèle Sud* (38 pages, 9 figures, 4 planches, 2 cartes, 1935) . . . . . fr. 50 »
2. POLINARD, E., *Contribution à l'étude des roches éruptives et des schistes cristallins de la région de Bondo* (42 pages, 1 carte, 2 planches, 1935) . . . . . fr. 30 »
3. POLINARD, E., *Constitution géologique et pétrographique des bassins de la Kotto et du M'Bari, dans la région de Bria-Yalinga (Oubangui-Char)* (160 pages, 21 figures, 3 cartes, 13 planches, 1935) . . . . . fr. 120 »

**Tome V.**

1. ROBYNS, W., *Contribution à l'étude des formations herbeuses du district forestier central du Congo belge* (151 pages, 3 figures, 2 cartes, 13 planches, 1936) . . . . . fr. 120 »
2. SCAËTTA, H., *La genèse climatique des sols montagnards de l'Afrique centrale. — Les formations végétales qui en caractérisent les stades de dégradation* (351 pages, 10 planches, 1937) . . . . . fr. 225 »

**Tome VI.**

1. GYSIN, M., *Recherches géologiques et pétrographiques dans le Katanga méridional* (259 pages, 4 figures, 1 carte, 4 planches, 1937) . . . . . fr. 130 »
2. ROBERT, M., *Le système du Kundelungu et le système schisto-dolomitique (Première partie)* (108 pages, 1940) . . . . . fr. 60 »
3. ROBERT, M., *Le système du Kundelungu et le système schisto-dolomitique (Deuxième partie)* (35 pages, 1 tableau hors-texte, 1941) . . . . . fr. 25 »
4. PASSAU, G., *La vallée du Lualaba dans la région des Portes d'Enfer* (66 pages, 1 figure, 1 planche, 1943) . . . . . fr. 50 »

**Tome VII.**

1. POLINARD, E., *Etude pétrographique de l'entre-Lulu-Lubilash, du parallèle 7°30' S. à la frontière de l'Angola* (120 pages, 1 figure, 2 cartes hors-texte, 1944) . . . . . fr. 90 »
2. ROBERT, M., *Contribution à la géologie du Katanga. — Le système des Kibaras et le complexe de base* (91 pages, 1 planche, 1 tableau hors-texte, 1944) . . . . . fr. 65 »
3. PASSAU, G., *Les plus belles pépites extraites des gisements aurifères de la Compagnie minière des Grands Lacs Africains (Province Orientale — Congo belge)* (32 pages, 20 planches hors-texte, 1945) . . . . . fr. 200 »
4. POLINARD, E., *Constitution géologique du Bassin de la Bushimaie entre la Mui et la Moro (Congo belge)* (50 pages, 12 planches et 1 carte hors-texte, 1949) . . . . . fr. 235 »
5. MOUREAU, J. et LACQUEMANT, S., *Cordyceps du Congo belge* (58 pages, 5 planches hors-texte, 1949) . . . . . fr. 210 »

**SECTION DES SCIENCES TECHNIQUES**

**Tome I.**

1. MAURY, J., *Triangulation du Katanga* (140 pages, figure, 1930) . . . . . fr. 50 »
2. ANTHOINE, R., *Traitement des minerais aurifères d'origine filonienne aux mines d'or de Kilo-Moto* (163 pages, 63 croquis, 12 planches, 1933) . . . . . fr. 150 »
3. MAURY, J., *Triangulation du Congo oriental* (177 pages, 4 fig., 3 pl., 1934) . . . . . fr. 100 »

**Tome II.**

1. ANTHOINE, R., *L'amalgamation des minerais à or libre à basse teneur de la mine du mont Tsi* (29 pages, 2 figures, 2 planches, 1936) . . . . . fr. 30 »
2. MOLLE, A., *Observations magnétiques faites à Elisabethville (Congo belge) pendant l'année internationale polaire* (120 pages, 16 fig., 3 pl., 1936) . . . . . fr. 90 »
3. DEHALU, M., et PAUWEN, L., *Laboratoire de photogrammétrie de l'Université de Liège. Description, théorie et usage des appareils de prises de vues, du stéréoplanigraphe C, et de l'Aéromultiplex Zeiss* (80 pages, 40 fig., 2 planches, 1938) . . . . . fr. 40 »
4. TONNEAU, R., et CHARPENTIER, J., *Etude de la récupération de l'or et des sables noirs d'un gravier alluvionnaire* (Mémoire couronné au Concours annuel de 1938) (95 pages, 9 diagrammes, 1 planche, 1939) . . . . . fr. 70 »
5. MAURY, J., *Triangulation du Bas-Congo* (41 pages, 1 carte, 1939) . . . . . fr. 30 »

**Tome III.**

- HERMANS, L., *Résultats des observations magnétiques effectuées de 1934 à 1938 pour l'établissement de la carte magnétique du Congo belge* (avec une introduction par M. Dehalu) :
1. Fascicule préliminaire. — *Aperçu des méthodes et nomenclature des Stations* (88 pages, 9 figures, 15 planches, 1939) . . . . . fr. 80 »
  2. Fascicule I. — *Elisabethville et le Katanga* (15 avril 1934-17 janvier 1935 et 1<sup>er</sup> octobre 1937-15 janvier 1938) (105 pages, 2 planches, 1941) . . . . . fr. 100 »
  3. Fascicule II. — *Kivu, Ruanda. Région des Parcs Nationaux* (20 janvier 1935-26 avril 1936) (138 pages, 27 figures, 21 planches, 1941) . . . . . fr. 150 »
  4. Fascicule III. — *Région des Mines d'or de Kilo-Moto, Ituri, Haut-Uele* (27 avril-16 octobre 1936) (71 pages, 9 figures, 15 planches, 1939) . . . . . fr. 80 »
  5. HERMANS, L., et MOLLE, A., *Observations magnétiques faites à Elisabethville (Congo belge) pendant les années 1933-1934* (83 pages, 1941) . . . . . fr. 80 »

**Tome IV.**

1. ANTHOINE, R., *Les méthodes pratiques d'évaluation des gîtes secondaires aurifères appliquées dans la région de Kilo-Moto (Congo belge)* (218 pages, 56 figures, planches, 1941) . . . . . fr. 150 »
2. DE GRAND RY, G., *Les graben africains et la recherche du pétrole en Afrique orientale* (77 pages, 4 figures, 1941) . . . . . fr. 50 »
3. DEHALU, M., *La gravimétrie et les anomalies de la pesanteur en Afrique orientale* (80 pages, 15 figures, 1943) . . . . . fr. 60 »
4. HEINRICHS, G., *Les observations magnétiques d'Elisabethville. Années 1938 à 1945* (250 pages, 6 figures, 5 planches, 1949) . . . . . fr. 485 »

**Tome V.**

1. BRAGARD, L., *La géodésie et la méthode gravimétrique* (72 pages, 1949) . . . . . fr. 100 »

**PUBLICATIONS HORS SÉRIE.**

- Biographie Coloniale Belge. — Belgische Koloniale Biografie* (t. I, xxxiv-512 pages et 2 hors texte, in-8°, 1948) :
- Broché . . . . . fr. 350 »
- Relié . . . . . fr. 400 »
- Atlas Général du Congo. — Algemene Atlas van Congo* (in-4°) :
- RELIURE MOBILE. — MOBIELE INBINDING . . . . . fr. 120 »
- Avant-propos. — Inleiding* (60 pages, 1 carte hors texte, 1948) . . . . . fr. 240 »
- Carte des Explorations. — Kaart van de Ontdekkingsreizen* (CAMBIER, R.) (22 pages, 1 carte hors texte, 1948) . . . . . fr. 100 »
- Carte des Territoires phytogéographiques. — Kaart van de Phytogeografische Streken* (ROBYNS, W.) (20 pages, 1 carte hors texte, 1948) . . . . . fr. 130 »
- Carte des Parcs Nationaux. — Kaart van de Nationale Parken* (ROBYNS, W.) (19 pages, 1 carte hors texte, 1948) . . . . . fr. 130 »



**BULLETIN DES SÉANCES DE L'INSTITUT ROYAL COLONIAL BELGE**

	Belgique.	Congo belge.	Union postale universelle.
Abonnement annuel. . . .	fr. 180.—	fr. 210.—	fr. 225.—
Prix par fascicule . . . .	fr. 75.—	fr. 90.—	fr. 90.—

Tome I (1929-1930) . . . .	608 pages	Tome XI (1940) . . . .	598 pages
Tome II (1931) . . . .	694 »	Tome XII (1941) . . . .	592 »
Tome III (1932) . . . .	680 »	Tome XIII (1942) . . . .	510 »
Tome IV (1933) . . . .	884 »	Tome XIV (1943) . . . .	632 »
Tome V (1934) . . . .	738 »	Tome XV (1944) . . . .	442 »
Tome VI (1935) . . . .	765 »	Tome XVI (1945) . . . .	708 »
Tome VII (1936) . . . .	626 »	Tome XVII (1946) . . . .	1084 »
Tome VIII (1937) . . . .	895 »	Tome XVIII (1947) . . . .	948 »
Tome IX (1938) . . . .	871 »	Tome XIX (1948) . . . .	1035 »
Tome X (1939) . . . .	473 »		

<i>Table décennale du Bulletin des Séances 1930-1939</i> , par E. DEVROEY . . . .	fr. 60 »
<i>Tienjarige inhoudstafel van het Bulletin der Zittingen 1930-1939</i> , door E. DEVROEY . . . . .	fr. 60 »

M. HAYEZ, Imprimeur de l'Académie royale de Belgique, rue de Louvain, 112, Bruxelles.  
(Domicile légal : rue de la Chancellerie, 4)

Printed in Belgium